



Processus aléatoires invariants d'échelle et analyse multirésolution pour la modélisation d'observations de systèmes physiques

Pierre Chainais

► To cite this version:

Pierre Chainais. Processus aléatoires invariants d'échelle et analyse multirésolution pour la modélisation d'observations de systèmes physiques. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. tel-00808965

HAL Id: tel-00808965

<https://theses.hal.science/tel-00808965>

Submitted on 8 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II



Processus aléatoires invariants d'échelle et analyse multirésolution pour la modélisation d'observations de systèmes physiques.

soutenue publiquement le 28 septembre 2009 par

Pierre CHAINAIS

Maître de Conférences (CNU 61) - LIMOS UMR CNRS 6158

Après avis des rapporteurs :

Bérengère DUBRULLE	DR CNRS, CEA Saclay, Gif sur Yvette
Patrick FLANDRIN	DR CNRS, ENS Lyon
Alain QUILLIOT	Professeur, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II
Bruno TORRÉSANI	Professeur, Université de Provence, Marseille

Composition du jury :

Patrice ABRY	DR CNRS Laboratoire de Physique ENS Lyon	Examineur
Patrick FLANDRIN	DR CNRS Laboratoire de Physique ENS Lyon	Rapporteur
Alain QUILLIOT	Professeur Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand	Président
Bruno TORRÉSANI	Professeur Université de Provence, Marseille	Rapporteur
Michael UNSER	Professeur École Polytechnique Fédérale de Lausanne	Examineur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement et chaleureusement Bérengère Dubrulle, Patrick Flandrin et Bruno Torrèsani d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur sur mon travail. Je suis très heureux de la présence de Patrice Abry, Alain Quilliot et Michael Unser aux côtés de Patrick Flandrin et Bruno Torrèsani dans le jury.

Ces quelques années au sein du LIMOS et de l'ISIMA m'ont appris à apprécier les conditions de travail qui m'y sont offertes. Merci à tous les habitants de cette maison aux couloirs un brin kafkaïens. Un grand merci en particulier à mes voisins du couloir B. Le bâtiment est habité par une petite tribu de fées sans lesquelles les choses ne seraient pas si simples. Heureusement, Annie, Béatrice, Corinne, Françoise, Martine, Martine, Rose...veillent sur nous, un grand merci à elles.

J'ai mes habitudes au café, voire parfois même au séminaire du Laboratoire de Mathématiques. Dans cette résidence secondaire, je retrouve mes amis mathématiciens, plus ou moins appliqués. Leur amitié m'est précieuse, au-delà de ce qu'ils imaginent, merci à ces grands alchimistes qui transforment le café en théorèmes.

Le monde universitaire m'a offert quelques belles rencontres. C'est un plaisir et une chance de pouvoir échanger et partager avec Alain, Anne, Aurélia, Bernard, Céline, David, François, Gabriel, Hermine, Jalal, Jean-François (ils sont nombreux!), Jean-Marie, Julien, Laure, Laurent, Ludovic (le roi des expérimentateurs!), Olivier, Pascale, Saulo, Stéphane, Vladas, Yann...

Certains partagent notre route depuis le début sur des voies parallèles. Serge et Isabelle, Laurent et Marguerite, Matthieu et Hélène, Nicolas et Pascale, Cécile et Vincent... sont embarqués comme nous sur des bateaux semblables. Merci de voguer avec nous.

Mes parents et mes beaux-parents sont toujours présents lorsqu'il faut passer le gué, toujours munis au minimum d'une palette de terrines et d'une caisse de gougères. Leur présence et leur soutien sans faille sont précieux.

Le passage de ce rite initiatique a demandé quelques efforts de compréhension et de patience à Claire, Titouan, Anouk et Léna. Mes recherches restent vaines pour trouver les mots suffisamment forts et justes pour les remercier.

Table des matières

Remerciements	1
De la physique de la turbulence au traitement du signal et des images	7
Liste de publications	11
I. Invariance d'échelle statistique	15
1 Auto-similarité	15
1.1 Statistique ou déterministe	15
1.2 Discrète ou continue	18
1.3 Longue dépendance et régularité locale	18
1.4 Isotrope ou anisotrope	19
1.5 Auto-similarité et stationnarité	21
1.6 Spectre des processus auto-similaires	21
1.7 Lois d'échelle (scaling)	22
2 Multiscaling et analyse multifractale	22
2.1 L'analyse multifractale	22
2.2 Le formalisme multifractal	23
2.3 La propriété de multiscaling	25
3 Lois d'échelle infiniment divisibles	26
3.1 Un peu d'histoire	26
3.2 Définitions et propriétés	26
3.3 Lien avec les cascades multiplicatives	28
3.4 Equation de Fokker-Planck en échelle	28
4 Conclusion	30

II. Construction de mesures aléatoires à lois d'échelle	31
1 Cascades infiniment divisibles (CID)	32
1.1 Vers les cascades continues	32
1.2 Définitions	34
1.3 Conséquences immédiates de la définition	37
1.4 Invariance d'échelle	39
1.5 Convergence et non-dégénérescence	41
1.6 Propriétés de multiscaling	43
1.6.1 Cas invariants d'échelle	43
1.6.2 Vers des écarts à l'invariance d'échelle	43
1.6.3 Intermittence	45
1.7 Algorithmes de synthèse	46
1.7.1 Simulation des cascades Poisson composées	46
1.7.2 Autres cascades infiniment divisibles	47
1.7.3 Extension aux surfaces non planes	48
2 Exponentielles d'intégrales stochastiques	50
2.1 Rappels	50
2.2 En dimension 1	51
2.3 En dimension $d \geq 2$	53
2.4 Définition spatio-temporelle causale	54
3 Conclusion & Perspectives	55
III. Construction de marches aléatoires à lois d'échelle	57
1 Mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal issu d'une CID	58
1.1 Définition	58
1.2 Propriétés	59
1.3 Simulation numérique	60
1.4 Modélisation d'un champ de vitesse turbulent	61
2 Marches aléatoires multifractales	62
2.1 Définitions	62
2.1.1 Intégrale de Wiener fractionnaire d'une CID	62
2.1.2 Notations	63
2.1.3 Normalisation pour convergence	64

2.2	Convergences	65
2.3	Simulation numérique	68
2.4	Propriétés	68
2.5	MRW et fBm à temps multifractal	69
3	Conclusion & Perspectives	70
IV. Estimation d'exposants de lois d'échelle		73
1	Modèles multifractals et estimation	73
1.1	Caisse à outils	73
1.2	Motivations	76
2	Mise en évidence de l'effet de linéarisation	77
2.1	Procédures d'estimation	77
2.2	Méthode d'analyse numérique	78
2.3	Mise en évidence et description	78
2.4	Discussion & conséquences pratiques	80
3	Estimation d'exposants de lois d'échelle sur la sphère	82
3.1	Motivations	82
3.2	Ondelettes sur la sphère	82
3.3	Analyse multifractale en ondelette sur la sphère	83
3.4	Conclusion	84
V. Modélisation d'images naturelles		85
1	Les CID, un modèle statistique pour les images naturelles	85
1.1	La modélisation statistique des images naturelles	85
1.2	Quelques bonnes propriétés des CID	87
1.2.1	Interprétation physique des CPC	87
1.2.2	Statistiques multivariées	88
1.3	Quelques modèles revisités à travers les CID	90
1.3.1	Mumford & Gidas	90
1.3.2	Modèle du générateur transporté : formes Bessel K	91
1.3.3	Modèles additifs multiéchelle	92
1.3.4	Mélanges d'échelles gaussiens (Gaussian Scale Mixtures)	93
1.4	Étude expérimentale	95

1.4.1	Analyse multifractale de l'intensité	95
1.4.2	L'analyse de Ruderman & Bialek	96
1.5	Conclusion	97
2	Modélisation d'images de Soleil calme	98
2.1	Motivations	98
2.2	Le Soleil calme	98
2.3	Analyse multifractale des images de Soleil calme	99
2.3.1	Démarche	99
2.3.2	Description des données	100
2.3.3	Résultats de l'analyse multifractale	100
2.4	Modélisation par des CPC intégrées fractionnairement	101
2.4.1	Identification des paramètres H et $\tau(q)$	101
2.4.2	Cascades Poisson composées intégrées fractionnairement	101
2.4.3	Augmentation virtuelle de résolution	103
2.5	Conclusion	104
VI.	Collaborations avec des industriels	107
1	Diagnostic de l'état des galets du système de guidage du Translohr	107
1.1	Présentation du problème	107
1.2	Principe de fonctionnement de SYSCOGA	108
1.3	Approche par décomposition multi-échelle et classification	109
1.4	Résultats et conclusion	110
2	Modélisation de champs de pression en paroi par des processus stochastiques	110
2.1	Position du problème	110
2.2	Modélisation par des champs aléatoires	112
2.3	Illustration de quelques résultats	112
3	Conclusion	113
	Bibliographie	114

De la physique de la turbulence au traitement du signal et des images

Mes travaux s'organisent essentiellement autour de la modélisation de systèmes désordonnés présentant une propriété d'*invariance d'échelle*. Les écoulements turbulents en dynamique des fluides ont été la première famille de systèmes à laquelle je me suis intéressé. La problématique, à l'interface entre physique expérimentale, analyse de données et modélisation statistique, m'a amené à investir de plus en plus en direction du traitement du signal. Cette évolution s'est accentuée après ma thèse puisque j'ai quitté le Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon pour le LIMOS, Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes au sein de l'Université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand. Je me suis alors plus orienté vers la modélisation des images naturelles aussi bien d'un point de vue théorique général que pour des applications telles que la modélisation d'images du Soleil calme ou des nuages par exemple. La partie modélisation faisant appel à certaines familles de processus stochastiques, notamment les *processus multifractals*, je me suis aussi beaucoup intéressé à la définition et à la construction de ces processus en interaction forte et régulière avec des physiciens et des mathématiciens.

En résumé, mes travaux ont essentiellement pour fil directeur une approche multirésolution de problèmes de modélisation de systèmes physiques désordonnés (turbulents) présentant une propriété d'invariance d'échelle, à l'interface entre les observations expérimentales, le traitement du signal et des images et la constructions de modèles mathématiques appropriés. J'ai aussi eu l'occasion de faire quelques excursions vers des sujets assez différents et plus orientés vers des applications industrielles, notamment en encadrant la thèse de Z. Hamou concernant le diagnostic des galets de guidage du tramway clermontois, en m'engageant dans un contrat avec PSA ou encore en m'impliquant avec K.M. Hou dans un projet de capteur d'électrocardiogramme embarqué.

Différentes classes de modèles ont fait l'objet de mes recherches. Chacune de ces classes correspond à une famille de signaux physiques. Dans une démarche de modélisation, l'identification de la classe d'objets mathématiques pertinente pour décrire les données expérimentales est une question essentielle. Les modèles invariants d'échelle peuvent prendre la forme d'une fonction, d'une mesure (déterministe ou aléatoire), d'un processus aléatoire... Le modèle retenu implique toujours plusieurs conséquences pratiques. Il influence notre façon de penser et notre intuition en lien avec le système physique étudié notamment à travers les hypothèses qu'il implique sur le comportement de la quantité étudiée. La famille mathématique du modèle conditionne aussi et surtout la famille des outils pertinents ainsi que leurs conditions d'utilisation. C'est le cas par exemple lorsqu'il s'agit de simu-

ler numériquement certains processus ou lorsque l'on souhaite estimer les paramètres du modèle.

La nature de la quantité à modéliser impose à son tour quelques contraintes sur les modèles envisageables. Mes origines en physique des écoulements turbulents ont beaucoup influencé mes centres d'intérêt. L'histoire du cadre multifractal (analyse, mesures, fonctions, processus...) est intimement liée à celle de la turbulence. Entre les années 1940 et 1970, Kolmogorov [123], Yaglom [216], Mandelbrot [139] et Novikov [154] notamment sont parmi les premiers à avoir posé les bases d'une modélisation des champs turbulents par des mesures et des processus aléatoires invariants d'échelle. Le champ de dissipation d'un écoulement turbulent est alors vu comme la densité d'une mesure multifractale, tandis qu'une composante du champ de vitesse ressemble plutôt à un mouvement brownien fractionnaire, c'est-à-dire une marche aléatoire. La plupart des modèles de turbulence établissent une correspondance entre les fluctuations de la vitesse et la dissipation dans l'esprit du modèle de Kolmogorov (1962) [124]. Nous verrons des constructions de marches aléatoires multifractales qui s'appuient sur cette idée initialement inspirée par l'équation de Karman-Howarth [92], un résultat directement issu des équations de Navier-Stokes. Il est remarquable que cette situation particulière à un phénomène physique a inspiré de nombreuses constructions mathématiques. Nous nous sommes par conséquent essentiellement intéressés aux mesures aléatoires invariantes d'échelles et aux marches aléatoires que l'on peut construire à partir d'elles.

Les mesures multifractales jouent un rôle central parmi les objets invariants d'échelle. Les premières constructions multifractales sont les mesures binomiales issues d'une cascade multiplicative [139, 216]. Déterministes dans leur version la plus simple, ce sont surtout les cascades multiplicatives aléatoires qui nous intéressent lorsqu'il s'agit de modéliser un système physique désordonné. La dissipation dans les écoulements turbulents mesure la quantité d'énergie dégagée par les frottements au sein d'un fluide visqueux en mouvement. Cette quantité est nécessairement positive, et peut a priori être infiniment localisée en temps ou en espace, au moins théoriquement. En effet, dans le cadre d'une approche théorique, on considère souvent la limite des écoulements "infiniment turbulents" dans la limite des nombres de Reynolds infinis, autrement dit lorsque le désordre s'étend sur des gammes d'échelles de temps et d'espace infiniment grandes. Les échelles de temps et d'espace les plus petites impliquées dans la dynamique de l'écoulement sont alors infiniment petites relativement à l'échelle d'injection de l'énergie (le plus petit tourbillon relativement à la taille de la cuiller qui remue le café). La mesure physique ne peut se faire qu'à une échelle finie non-nulle. La dissipation doit par conséquent être modélisée par une distribution ; une mesure physique correspondra à une intégrale de cette distribution sur un domaine de taille finie, la mesure d'un domaine. Le même raisonnement semble pouvoir se transposer à l'intensité lumineuse à la source d'une image. Il s'agit d'une quantité positive mesurée par intégration sur un domaine de taille finie, le pixel. Une motivation importante de mes travaux a été d'identifier une construction de mesure aléatoire invariante d'échelle qui s'affranchisse des limitations des premières cascades de Yaglom et Mandelbrot qui font intervenir un rapport d'échelle privilégié, limitant ainsi le cadre de travail à celui d'une invariance d'échelle discrète. Le passage en dimension supérieure à 1 était aussi un objectif important, ne serait-ce que pour envisager la modélisation d'images.

En turbulence, le champ de vitesse turbulent $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ à l'instant t en un point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est la quantité que l'on souhaite principalement modéliser. Idéalement, nous sommes à la recherche de processus aléatoires vectoriels $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$; il s'agit d'un champ vectoriel à 3 composantes dépendant de 4 paramètres. La question est complexe, surtout si l'on comprend que nous voudrions finalement contourner les difficultés mathématiques de la résolution directe des équations de Navier-Stokes en construisant directement un processus aléatoire ayant toutes les propriétés d'une solution de ces équations... Les progrès sont lents, mais réels. Jusqu'à la fin des années 1990, il n'était pas vraiment question de simuler des processus ressemblant à des données issues d'un écoulement turbulent mais plutôt de multiplier et d'affiner les analyses de données expérimentales. Une motivation importante de mes travaux a été la quête de constructions de marches aléatoires multifractales ressemblant à une composante d'un champ de vitesse turbulent mesurée en un point au cours du temps. Il s'agira ensuite de prolonger le travail avec en ligne de mire la modélisation du champ vectoriel avec sa dépendance spatiale voire spatio-temporelle.

Le document est conçu pour constituer un ensemble cohérent autour du thème des modèles invariants d'échelle, chapitres I à V, complété par le chapitre VI consacré à des travaux assez différents et menés dans le cadre de collaborations avec des industriels. Afin de permettre une lecture multirésolution, chaque chapitre est introduit par une présentation du contexte dans lequel les travaux ont été menés, une description synthétique des problématiques abordées et des résultats obtenus.

Le chapitre I rassemble les notions et propriétés essentielles liées à l'invariance d'échelle statistique, en précisant les notations utilisées par la suite. Il s'agit d'un rapide panorama allant de l'auto-similarité aux lois d'échelles infiniment divisibles en passant par l'analyse multifractale.

Ma thèse m'avait amené à étudier de manière approfondie les propriétés d'invariance d'échelle sous l'angle de l'analyse de données. Cependant, ce n'est qu'à la fin de ma thèse et dans les années qui ont suivies que sont apparus les premiers modèles permettant de reproduire les propriétés que l'on prétendait observer dans les données expérimentales issues de la turbulence ou du trafic informatique. Le chapitre II est consacré à nos travaux sur la définition de mesures aléatoires à lois d'échelle dans une gamme *continue* d'échelle. Nous décrivons d'abord les cascades infiniment divisibles. Ce travail doit beaucoup à une collaboration avec Rolf Riedi (Rice Univ., Houston), rencontré au printemps 2001, à la fin de ma thèse. Certains aspects font actuellement l'objet de prolongements dans le cadre de la thèse de Émilie Koenig. La deuxième partie de ce chapitre II est consacrée à une collaboration avec François Schmitt (Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, UMR 8187, Univ. Lille 1) qui avait pour but d'établir les liens entre des approches a priori différentes d'objets très similaires.

Après avoir réprécisé ce qui distingue les notions de *processus* et de *mesure*, le chapitre III aborde le problème de la construction de processus stochastiques à loi d'échelle. Nous commençons par un rappel sur le mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal issu d'une cascade infiniment divisible, sur lequel nous avons aussi travaillé avec Patrice Abry et Rolf Riedi. Nous nous intéressons ensuite aux marches aléatoires multifractales et à leur définition rigoureuse. Ce travail avait pour point de départ la construction discrète

proposée par Bacry, Delour & Muzy (2001) [23]. Il s’agit d’une collaboration de longue haleine avec Vlasos Pipiras (Univ. North Carolina), Laure Coutin (Univ. Paris V) et Patrice Abry, impliquant la notion délicate d’intégrale de Wiener fractionnaire.

Le chapitre IV aborde un aspect essentiel pour l’utilisation pratique des modèles décrits dans les chapitres précédents puisqu’il s’agit de l’estimation d’exposants de lois d’échelle. Ce travail, lié à la thèse de Bruno Lashermes encadrée par Patrice Abry, nous a permis de mettre en évidence un comportement des estimateurs appelé *effet de linéarisation* : en dehors d’une certaine gamme de valeurs de l’ordre considéré, les exposants de lois d’échelle adoptent un comportement trivial qu’il s’agit de bien comprendre. Cet effet doit être pris en considération dans une démarche d’identification de modèle.

Les chapitres précédents nous munissent d’un ensemble d’outils pour la construction de modèles ainsi que pour leur identification. Le chapitre V aborde finalement la modélisation elle-même dans le domaine de l’image. La première partie du chapitre est consacrée à un travail que j’ai mené seul sur la modélisation statistique des images naturelles. Ce travail a marqué un tournant dans mon activité de recherche en amorçant une orientation de plus en plus nette vers le thème “image”. Il apparaît que les cascades infiniment divisibles fournissent un cadre et une grille de lecture tout à fait pertinents pour décrire et comprendre les propriétés statistiques des images naturelles. La deuxième partie est consacrée au problème plus concret de la modélisation d’images de Soleil calme provenant du télescope spatial E.I.T.. À l’occasion du colloque WAMA’2004 célébrant à Cargèse (Corse) les 20 ans des ondelettes, j’ai fait la connaissance de Véronique Delouille (Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles). Il s’agit du point de départ d’une collaboration toujours active qui implique aussi Jean-François Hochedez, responsable de l’équipe de Physique Solaire de l’O.R.B.. Le projet Hubert Curien (Tournesol) obtenu sur la période 2006-2008 nous a permis de consolider notre collaboration ainsi que d’en initier de nouvelles en impliquant d’autres chercheurs du LIMOS et de l’ORB. L’un des objectifs est la prédiction de la qualité d’observations futures à haute résolution à partir des observations (basse résolution) actuelles. Nous avons d’abord effectué une analyse détaillée des images de Soleil calme qui présentent des propriétés d’invariance d’échelle. Un modèle reposant sur des cascades infiniment divisibles 2D s’avère pertinent. Dans le cadre de la thèse d’Émilie Koenig, nous avons proposé une méthode d’extrapolation aléatoire utilisant ce modèle pour proposer des réalisations d’images haute résolution cohérentes avec les observations à basse résolution.

En parallèle de mes travaux sur les modèles invariants d’échelle, j’ai été amené à travailler sur des problèmes assez différents, en lien avec des industriels. Le dernier chapitre décrit très brièvement cette partie de mon activité. La première partie est consacrée au travail de thèse de Zahra Hamou, co-encadrée de 2004 à 2008 avec Alexandre Aussem (Univ. Lyon 1), dans le cadre d’un contrat avec le Syndicat Mixte des Transports Clermontois. La thèse de Zahra, soutenue en juillet 2008, portait sur le diagnostic de l’état des galets du système de guidage du Translohr, le tramway sur pneumatiques récemment installé à Clermont-Ferrand. La deuxième partie évoque un travail mené dans le cadre d’un contrat avec le service R&D de PSA sur la simulation de champs de pression en paroi sous un écoulement turbulent par des champs aléatoires (pas spécialement invariants d’échelle pour une fois).

Liste de publications

Articles de revue

- [1] P. Abry, P. Chainais, L. Coutin, V. Pipiras. Multifractal random walks as fractional Wiener integrals. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 55 no 8, pp.3825-3846, 2009.
- [2] V. Delouille, P. Chainais, J.-F. Hochedez. Quantifying and containing the curse of high resolution coronal imaging. *Annales Geophysicae*, Vol. 26 no 10, pp.3169-3184, 2008.
- [3] S. Gissot, J.-F. Hochedez, P. Chainais, J.-P. Antoine, 3D reconstruction from SECCHI-EUVI images using an optical-flow algorithm : method description and observation of an erupting filament. *Solar Physics*, Vol. 252, no 2, pp. 397-408, 2008.
- [4] V. Delouille, P. Chainais, J.-F. Hochedez. Spatial and temporal noise in solar EUV observations. *Solar Physics*, Vol. 248, pp. 441-455, 2008.
- [5] P. Chainais. Infinitely divisible cascades for the statistical modeling of natural images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 29, no 12, pp. 2105-2119, 2007.
- [6] F.G. Schmitt, P. Chainais. On causal stochastic equations for log-stable multiplicative cascades. *European Physical Journal B*, Vol. 58, pp. 149-158, 2007.
- [7] P. Chainais. Multidimensional infinitely divisible cascades. Application to the modeling of intermittency in turbulence. *European Physical Journal B*, Vol. 51 no. 2, pp. 229-243, 2006.
- [8] P. Chainais, R. Riedi, P. Abry. Non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51 no 3, pp 1063–1083, March 2005.
- [9] P. Chainais, R. Riedi, P. Abry. Warped infinitely divisible cascades : beyond power laws. *Traitement du Signal*, Vol. 22 no 1, 2005.
- [10] B. Lashermes, P. Abry, P. Chainais. New insights in the estimation of scaling exponents. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol. 2 no 4, pp. 497-523, Dec. 2004.
- [11] P. Chainais, P. Abry, et J. Pinton. Intermittency and coherent structures in a turbulent flow : a wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements. *Phys. Fluids*, 11, 11, pp. 3524–3539, 1999.

Actes de conférences internationales (avec comité de lecture)

- [12] E. Koenig, P. Chainais, Virtual resolution enhancement of scale invariant textured images using stochastic processes, *IEEE Proceedings of Int. Conf. on Image Processing ICIP 2009*.
- [13] Z. Hamou Mamar, P. Chainais, A. Aussem, Combining learning methods and time-scale analysis for defect diagnosis of a tramway guiding system, *IEEE Proceedings of MED'08*, Ajaccio, 2008.

- [14] E. Koenig, P. Chainais, Multifractal analysis on the sphere, *Proceedings of ICISP'08*, Cherbourg, 2008.
- [15] P. Chainais, V. Delouille, J.-F. Hochedez. Modeling images of the Quiet Sun in the extreme ultraviolet, *Proceedings of SPIE Wavelet XII*, (15 p.) San Diego, 2007.
- [16] Z. Hamou-Mamar, P. Chainais, A. Aussem Probabilistic classifiers and time-scale representations : application to the monitoring of a tramway guiding system, *Proceedings of European Symposium on Artificial Neural Networks ESANN'2006*.
- [17] A. Aussem, P. Chainais. Modeling switching dynamics using prediction experts operating on distinct wavelet scales, *Proceedings of European Symposium on Artificial Neural Networks ESANN'2006*
- [18] P. Chainais. Infinitely divisible multiplicative cascades to model the statistics of natural images. *IEEE Proceedings of Int. Conf. on Image Processing ICIP 2005*.
- [19] V. Barra, V. Delouille, J.F. Hochedez, P. Chainais, Segmentation of EIT Images using a fuzzy clustering algorithm : a preliminary study, *Proceedings of European SPM-11*, Leuven, sept. 2005.
- [20] B. Lashermes, Ch. Baudet, P. Abry, P. Chainais. Limitation of scaling exponents estimation in turbulence. *Advances in Turbulence X*, ISBN : 84-95999-55-2, 2004.
- [21] H. Zhou, K. M. Hou, J. Ponsonnaille, L. Gineste, J. Coudon, G. de Sousa, C. de Vault, J.-J. Li, P. Chainais, R. Aufrère, A. Amamra, J.-P. Chanet. Remote continuous cardiac arrhythmias detection and monitoring. *Proc. of 2nd International Conference on E-health in Common Europe*. Krakow, March 2004.
- [22] B. Lashermes, P. Abry, P. Chainais. Scaling exponent estimation for multiscaling processes. *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.*. IEEE, Montréal, 2004.
- [23] B.Lashermes, P. Abry et P. Chainais. New insights on the estimation of scaling exponents. *Wavelet and Statistics Conference*. Villard de Lans, Sept. 2003.
- [24] D. Veitch, P. Abry, P. Flandrin, et P. Chainais. Infinitely divisible cascade analysis of network traffic data. *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.* IEEE, Istanbul, 2000.
- [25] P. Chainais, P. Abry, et D. Veitch. Multifractal analysis and α -stable processes : a methodological contribution. Dans *Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc.* IEEE, Istanbul, 2000.
- [26] P. Chainais, E. Lévêque, P. Abry, et C. Baudet. Remarkable features of multiplier distributions in turbulence. *Advances in Turbulence VIII*, pp.755-758. Kluwer, 2000.

Actes de conférences nationales (avec comité de lecture)

- [27] E. Koenig, P. Chainais. Amélioration virtuelle de la résolution d'images du Soleil par augmentation d'information invariante d'échelle, *Actes du GRETSI*, Dijon, 2009.
- [28] P. Chainais, M. Pachebat. Simulation de champs de pression en paroi par des processus aléatoires, *Actes du GRETSI*, Dijon, 2009.

-
- [29] P. Chainais, F. Schmitt. Intégrales stochastiques et cascades multiplicatives log-stables, *Actes du GRETSI*, Troyes, 2007.
 - [30] P. Chainais, F. Schmitt. Intégrales stochastiques et cascades multiplicatives log-stables, *Actes du GRETSI*, Troyes, 2007.
 - [31] P. Chainais, V. Delouille, J.-F. Hochedez. Modélisation des images de Soleil calme dans l'extrême ultra-violet, *Actes du GRETSI*, Troyes, 2007.
 - [32] P. Chainais, J.J. Li. Synthèse de champs scalaires multifractals : application à la synthèse de texture, *Actes du GRETSI 2005*.
 - [33] B. Lashermes, P. Abry, P. Chainais. De l'estimation des exposants de lois d'échelle. *Actes du GRETSI*, Paris, 2003.
 - [34] P. Chainais, R. Riedi, P. Abry. Non scale invariant infinitely divisible cascades. *Actes du GRETSI*. Paris, 2003.
 - [35] P. Chainais, R. Riedi, P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. *PSIP'03*, Grenoble, 2003.
 - [36] P. Chainais, S. Roux, P. Abry, et D. Veitch. Analyse et modélisation de séries temporelles à l'aide de cascades. Application à l'étude du trafic internet. *Actes du GRETSI*, Toulouse, 2001.

I. Invariance d'échelle statistique

1 Auto-similarité

La forme d'invariance d'échelle la plus simple est l'*auto-similarité* par dilatation, associée à l'absence d'échelle caractéristique dans l'objet (physique ou mathématique) considéré. Nous revenons ci-dessous sur les définitions de différentes formes d'auto-similarités : statistique ou déterministe, discrète ou continue, asymptotique aux grandes ou aux petites échelles, isotrope ou anisotrope...

1.1 Statistique ou déterministe

Dans le cadre déterministe, un objet est dit auto-similaire lorsqu'il existe un opérateur contractant qui laisse l'objet invariant ; nous ne considérons ici que les dilatations. Un exemple simple est l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, f(ct) = c^H f(t). \quad (\text{I.1})$$

Il est aisé de vérifier que l'ensemble de ces fonctions auto-similaires est l'ensemble des fonctions "puissance", $f(t) = a|t|^H$, $H \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, nous parlons d'invariance d'échelle relativement à l'opérateur $f \mapsto c^{-H} f(c \cdot)$ ($\forall c \in \mathbb{R}^+$). Notons d'ores et déjà le rôle particulier que jouent les lois de puissance dans la description de l'invariance d'échelle.

Dans un esprit légèrement différent, des objets fractals peuvent être construits en utilisant une transformation dont ils sont le point fixe [30]. L'ensemble de Cantor, associé à l'escalier du Diable, peut être défini comme le point fixe des transformations $x \mapsto x/3$ et $x \mapsto x/3 + 2/3$ (itérées une infinité de fois) à partir de l'intervalle $[0, 1]$. Notons que ces transformations sont contractantes d'un facteur $1/3$. Ainsi, l'ensemble des points contenus dans l'intervalle $[0, 1/3]$ est identique à l'ensemble de Cantor à une dilatation d'un facteur 3 près. Le flocon de von Koch, le tapis de Sierpinski ou les célèbres fougères fractales sont construits de la même façon à 2 dimensions. En 3 dimensions, on pourrait ainsi construire un objet semblable au chou romanesco, l'archétype des objets naturels auto-similaires. Cette géométrie très particulière peut aussi être vue comme l'état stationnaire d'un processus de croissance *auto-organisé* faisant apparaître des spirales particulières [80–82].

Pour tous les exemples que nous venons d'évoquer, les correspondances entre les descriptions d'un même objet à des échelles différentes sont déterministes. On parle d'*invariance d'échelle déterministe*.

Dans le cadre stochastique, nous parlerons d'auto-similarité au sens statistique lorsque les correspondances entre les descriptions d'un même objet à des échelles différentes ne sont vraies qu'au sens d'une égalité en loi notée $\stackrel{d}{=}$ ici. Un processus stochastique $X(t)$ indexé par \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R} est dit auto-similaire de paramètre H si :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \{X(ct), t \in \mathbb{R}^+\} \stackrel{d}{=} c^H \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}. \quad (\text{I.2})$$

Autrement dit, on ne peut pas distinguer le processus de sa version dilatée en temps et en amplitude. L'archétype des processus auto-similaires est le mouvement brownien fractionnaire (fBm) noté $B_H(t)$, le seul processus gaussien auto-similaire à accroissements stationnaires. Le paramètre H est appelé paramètre de Hurst.

Un autre exemple de processus auto-similaire au sens statistique est la famille des cascades multiplicatives, introduites par Yaglom [216] et l'école russe dans les années 60 puis développées par Mandelbrot [139]. Les propriétés mathématiques des mesures associées ont été formalisées par Kahane & Peyrière [116] puis dans divers travaux, par exemple [148, 158]. Une mesure invariante d'échelle est obtenue comme limite d'une redistribution itérative de la mesure unité $\mu_o = 1$ initiale sur l'intervalle $I_o = [0, 1]$. Soit p un entier naturel non nul. À l'étape $n + 1$, l'intervalle $I_{n,k}$, $1 \leq k \leq p^n$ affecté de la mesure $\mu_n(I_{n,k})$ est divisé en p sous-intervalles de même longueur $I_{n,k}^{(j)}$, $1 \leq j \leq p$, auxquels on attribue la mesure

$$\mu_{n+1}(I_{n,k}^{(j)}) = W_{n,k}^{(j)} \cdot \mu_n(I_{n,k}). \quad (\text{I.3})$$

La cascade binomiale correspond au cas où pour $p \geq 2$, seuls deux multiplicateurs $W_{n,k}^{(j)}$ sont non-nuls à chaque étape. Pour $p = 2$ et $W_2 = 1 - W_1$, $0 \leq W_1 \leq 1$, on obtient la cascade binomiale microcanonique, ainsi dénommée en référence à la physique statistique car elle conserve exactement la mesure de Lebesgue d'un intervalle; on parle parfois de cascade conservative. Pour $p = 3$, on construit une *mesure de Bernoulli* sur l'ensemble de Cantor triadique pour $\{p = 3, W_1 \in [0, 1], W_2 = 0, W_3 = 1 - W_1\}$. Ces deux derniers exemples vérifient une invariance d'échelle déterministe. Dans le cas où les W_j sont des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}W_j = 1/p$, on parle de cascade binomiale "canonique" ou de cascade conservative en moyenne. Dans ce dernier cas, si la mesure limite μ_∞ est bien définie, la propriété d'auto-similarité d'une telle mesure s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq k \leq p^n, \forall I \subset [0, 1], \mu_\infty(I_{n,k}) \stackrel{d}{=} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} W_i \right) \cdot \mu_\infty(I) \quad (\text{I.4})$$

où les W_i sont indépendants et identiquement distribués. Il s'agit cette fois d'une invariance d'échelle statistique.

En résumé, le type d'invariance d'échelle statistique auquel nous nous intéressons plus particulièrement peut prendre essentiellement deux formes. La première forme correspond à l'auto-similarité se traduisant par

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \{X(ct), t \in \mathbb{R}^+\} \stackrel{d}{=} c^H \cdot \{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}. \quad (\text{I.5})$$

On parlera de processus auto-similaire, une famille de processus monofractals.

Remarque : la notion d'auto-similarité statistique peut être étendue en dimension $d \geq 2$ avec éventuellement d'autres opérateurs que la dilatation naturelle, introduisant éventuellement de l'anisotropie, voir §1.4.

Un cadre à la fois plus souple et plus complexe correspond à la situation où

$$\forall c \in [0, 1], \{X(ct), t \in [0, T]\} \stackrel{d}{=} W_c \cdot \{X(t), t \in [0, T]\} \quad (\text{I.6})$$

où T est une grande échelle au-delà de laquelle cette auto-similarité ne peut plus être valable ; W_c une variable aléatoire indépendante de X . Nous rencontrerons essentiellement par la suite le cas où

$$W_c = c^H e^{\Omega_c} \quad (\text{I.7})$$

avec Ω_c une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{E}e^{q\Omega_c} = c^{\tau(q)} \quad (\text{I.8})$$

pour les valeurs de q telles que $\mathbb{E}e^{q\Omega_c}$ est bien définie. Les processus considérés seront alors multifractals, les exposants multifractals associés étant de la forme $\zeta(q) = qH + \tau(q)$ où $\tau(q)$ est une fonction concave. C'est surtout à cette famille de processus que nous nous sommes intéressés.

Il est remarquable que, dès lors que Ω_c n'est pas réduite à la constante nulle, la propriété d'invariance d'échelle ainsi décrite n'est plus valable que pour une gamme finie d'échelle $t \in [0, T]$ pour des facteurs de dilatation $c \in [0, 1]$ (voir par exemple Annexe A de la thèse de J. Delour [78]). C'était d'ailleurs le cas pour les cascades binomiales décrites plus haut, voir (I.4). En effet, si le processus est à accroissements stationnaires, les moments des valeurs absolues de ses accroissements $\delta_\tau X(t) = X(t + \tau) - X(t)$ sont (s'ils existent) de la forme

$$\mathbb{E}|\delta_\tau X|^q = \mathbb{E}|\delta_1 X|^q \tau^{\zeta(q)} \quad (\text{I.9})$$

que l'on peut réécrire en prenant le logarithme de cette égalité

$$\ln \mathbb{E}|\delta_\tau X|^q = \ln \mathbb{E}|\delta_1 X|^q + \zeta(q) \ln \tau. \quad (\text{I.10})$$

Or $f_\tau(q) = \ln \mathbb{E}|\delta_\tau X|^q$ est une fonction convexe de q (cf. inégalité des moments [87]), d'où

$$f''_\tau(q) = f''_1(q) + \zeta''(q) \ln \tau \geq 0. \quad (\text{I.11})$$

Dans le cas habituel des signaux multifractals pour lesquels $\zeta''(q) \leq 0$, on en déduit que le comportement décrit par (I.6) n'est effectivement possible que pour

$$\tau \leq T \leq \inf_q \left(\exp \left[-\frac{f''_1(q)}{\zeta''(q)} \right] \right) \quad (\text{I.12})$$

où l'infimum est évalué sur l'ensemble des valeurs de q pour lesquelles les moments $\mathbb{E}|\delta_\tau X|^q$ existent et obéissent aux lois d'échelles (I.9). La gamme d'échelle dans laquelle on peut espérer observer une invariance d'échelle telle que décrite par (I.6) est donc bornée par une grande échelle T . Notons que l'on s'attend à ce que T tende vers l'infini lorsque $\sup_q \zeta''(q)$ tend vers 0, ce qui correspond au cas de l'auto-similarité évoquée précédemment ($W_c = c^H$).

1.2 Discrète ou continue

Les premières constructions d'objets invariants d'échelle font le plus souvent intervenir un rapport d'échelle privilégié. L'ensemble de Cantor, les cascades binomiales ou les systèmes de fonctions itérées (IFS) sont issus de constructions itératives ayant une structure arborescente sous-jacente. L'analyse des propriétés d'invariance d'échelle de ces objets (moyennes par boîtes, coefficients d'ondelettes...) se traduira par l'apparition d'oscillations log-périodiques ; on parle parfois de lacunarité. On pourra retrouver ce type de comportement sur un processus construit en imposant à ses coefficients d'ondelettes (associés à un arbre dyadique) les mêmes distributions qu'à un mouvement brownien fractionnaire (fBm). Si l'ondelette utilisée est quelconque et non spécialement construite pour synthétiser un fBm, le processus obtenu présentera à l'analyse un comportement proche de celui d'un fBm mais entaché d'oscillations log-périodiques de période $\ln 2$. On parle d'invariance d'échelle discrète.

L'invariance d'échelle discrète a été en particulier très étudiée par D. Sornette et ses collaborateurs [196] qui se sont intéressés à la mise en évidence de propriétés d'invariance d'échelle discrète dans divers phénomènes physiques (tremblements de terre, turbulence, croissance d'agrégats...) ainsi qu'en finance. La thèse de P. Borgnat [46] est aussi en partie consacrée à la formalisation d'outils d'analyse et de modélisation de l'invariance d'échelle discrète et des invariances d'échelle brisées en général.

L'un des objectifs de nos travaux est au contraire d'explorer les modèles qui permettent d'obtenir une invariance d'échelle continue au sens où aucun rapport d'échelle n'a de rôle particulier. Échapper à l'invariance d'échelle discrète s'avère parfois difficile. Par exemple, la simulation du fBm, l'archétype des processus auto-similaires, a motivé tout un ensemble de travaux [7, 69, 79, 146, 200, 215]. Les méthodes à base d'ondelettes reposent sur la construction d'une base d'ondelettes spécifiquement adaptée [146, 200], faute de quoi des oscillations log-périodiques apparaîtront dans les lois d'échelle. On ne peut pas se contenter de prescrire naïvement les distributions des coefficients à chaque échelle ; les contributions des ondelettes aux différentes échelles doivent se combiner pour produire une invariance d'échelle continue. Quant aux approches reposant sur les cascades multiplicatives, c'est seulement au début des années 2000 que des constructions "continues" ont été proposées [23, 25, 33, 62, 63, 65, 150, 176, 188–190]. Il a fallu pour cela abandonner les constructions itératives arborescentes.

1.3 Longue dépendance et régularité locale

Lorsqu'il s'agit de modéliser un système physique, l'absence d'échelle caractéristique que suppose l'invariance d'échelle s'avère généralement fausse au sens strict. Tous les systèmes physiques ont au moins soit une échelle minimale, souvent liée à un phénomène de dissipation, soit une échelle maximale, souvent liée à la taille finie du système ou à sa dynamique. Paradoxalement, l'hypothèse d'invariance d'échelle n'est en général qu'une approximation valable dans une gamme d'échelle bornée supérieurement et/ou inférieurement. C'est l'étude d'un comportement asymptotique du système qui peut néanmoins

justifier une telle approche. On rencontre cette situation dans l'étude des systèmes critiques en physique. Un système critique est un système au voisinage d'une transition de phase continue, par exemple entre liquide et gaz. Sous certaines conditions de pression et de température, la distinction précise entre liquide et gaz n'est plus possible, la transition de l'un à l'autre étant continue. Dans ce cas, le comportement au voisinage de la température critique T_c fait apparaître une divergence de la longueur de corrélation des grandeurs observables. En turbulence, on pense à la limite $Re \rightarrow \infty$ où la gamme d'échelle disponible s'étend à l'infini.

Notons que la notion d'invariance d'échelle ne renvoie pas aux mêmes propriétés selon qu'on la considère dans la limite des grandes ou des petites échelles. À grande échelle, l'invariance d'échelle est potentiellement associée au phénomène de longue dépendance. En effet, les accroissements d'un processus autosimilaire de paramètre H à accroissements stationnaires sont à dépendance longue si $1/2 < H < 1$. En notant les accroissements $\delta_s X(t) = X(t+s) - X(t)$ et leur fonction d'autocorrélation $c_{\delta_s X}(\tau) = \mathbb{E} \delta_s X(t) \delta_s X(t+\tau)$, cette propriété de longue dépendance se traduit par un comportement aux temps longs de la forme :

$$\begin{cases} c_{\delta_s X}(\tau) \sim \tau^{-\beta}, & \tau \rightarrow +\infty, \quad \beta \in [0, 1] \\ \int c_{\delta_s X}(\tau) d\tau = +\infty \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

où $\beta = 2 - 2H$. Ainsi, un fBm d'exposant de Hurst $1/2 < H < 1$ présente cette propriété de longue dépendance. On peut définir la dépendance à longue portée par le comportement asymptotique en loi de puissance de la fonction d'autocorrélation associé à la divergence de sa somme, d'autres définitions sont possibles [178]. Le spectre des accroissements obéit alors à une loi de puissance au voisinage de la fréquence nulle :

$$\Gamma_{\delta_s X}(\nu) \sim |\nu|^{\beta-1}, \quad |\nu| \rightarrow 0 \quad (\nu \ll 1/s). \quad (\text{I.14})$$

À petite échelle, c'est la régularité du processus qui est concernée. Les trajectoires d'un fBm sont d'autant plus irrégulières que H est petit. Notons au passage que la validité de la propriété d'auto-similarité au sens strict, donc à toutes les échelles, est particulièrement forte. Le fBm est le seul processus gaussien à accroissements stationnaires auto-similaire. De manière plus générale, la prescription conjointe de propriétés d'auto-similarité, de distribution et de stationnarité restreint beaucoup les définitions possibles.

Dans ce travail, c'est généralement la modélisation du système dans la limite des petites échelles qui nous motivera. Par conséquent, nous nous appuierons souvent sur des arguments issus de ou inspirés par l'analyse multifractale (voir §2 de ce chapitre).

1.4 Isotrope ou anisotrope

En dimension $d \geq 2$, la propriété d'isotropie de l'auto-similarité habituelle peut être dépassée, offrant ainsi un nouveau degré de liberté, et donc un choix plus large pour la modélisation de systèmes physiques. Le passage en dimension $d \geq 2$ s'envisage aussi bien pour l'espace des paramètres que pour l'espace dans lequel le processus prend ses valeurs.

Plusieurs travaux ont exploré ces deux types de généralisations de la l'auto-similarité, sous les noms respectifs de *operator scaling* et *operator-self-similarity* (que nous ne prendrons pas le risque de traduire ici...).

Pour un processus $X = \{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ à valeur dans \mathbb{R} , la définition (I.2) de l'auto-similarité devient :

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \{X(c\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{d}{=} c^H \{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}. \quad (\text{I.15})$$

Cette définition repose sur l'utilisation d'une dilatation naturelle (isotrope) dans l'espace des paramètres. Or, en dimension $d \geq 2$, on peut envisager l'extension de cette définition à une dilatation anisotrope définie par exemple comme une dilatation matricielle. Cette généralisation a récemment suscité plusieurs travaux mathématiques pour définir des processus *operator scaling*, voir notamment Biermé et ses collaborateurs [42, 44, 45] et Clausel & Vedel [68]. Un champ scalaire aléatoire $\{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ est dit *operator-scaling* s'il existe une matrice E de taille $d \times d$ ayant des valeurs propres de parties réelles positives et $H > 0$ tels que

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \{X(c^E \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{d}{=} c^H \{X(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}, \quad (\text{I.16})$$

où $c^E = \exp(E \ln c)$ et $\exp(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est une exponentielle de matrice. Notons que le choix $E = I$ correspond à l'auto-similarité habituelle. Selon la nature de la matrice E , cette auto-similarité matricielle pourra faire intervenir des vitesses de dilatation différentes selon les axes définis par les vecteurs propres de E , une rotation (spirale) ou une transvection (effet de cisaillement), voir les exemples décrits dans [68]. Cette idée avait déjà été explorée dans les années 1980 sous le nom d'invariance d'échelle généralisée (generalized scale invariance) par les physiciens Schertzer & Lovejoy [180–182] (voir notamment l'annexe D de [182]) puis approfondie dans [184]. Leur motivation principale était de tenir compte de l'anisotropie des phénomènes atmosphériques selon qu'ils sont considérés à grande ou à petite échelle. À petite échelle, les écoulements sont essentiellement tridimensionnels; à grande échelle, la physique est sensible à l'épaisseur finie de l'atmosphère et devient quasi-bidimensionnelle. Des exemples de simulations sont décrits dans [161].

La définition a aussi été étendue par Laha & Rohatgi (1981) [125] à la notion d'auto-similarité relativement à un opérateur pour les processus à valeurs dans \mathbb{R}^d indexé par \mathbb{R} . Cette généralisation qui introduit une anisotropie dans la structure du champ $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ porte le nom d'*operator self-similarity*. Un processus $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est dit *operator self-similar* s'il existe une matrice D de taille $d \times d$ telle que

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \{\mathbf{X}(ct), t \in \mathbb{R}^+\} \stackrel{d}{=} c^D \{\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}^+\} \quad (\text{I.17})$$

où $c^D = \exp(D \ln c)$ est une exponentielle de matrice. L'anisotropie concerne cette fois la structure du champ vectoriel $X(t) \in \mathbb{R}^d$ et non le paramètre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ comme c'était le cas dans la définition de l'*operator scaling* ci-dessus. Maejima et Mason (1994) [136] ont proposé les premiers processus dits *operator-self-similar* et introduit la notion de *operator fractional Brownian motion*. Meershaert *et al* (2001) ont étudié ce type de processus, motivés par la diffusion anormale et anisotrope dans les milieux aquifères (voir aussi [37]).

1.5 Auto-similarité et stationnarité

Lamperti [126] a introduit la notion de processus auto-similaire et établi une correspondance entre processus stationnaires et processus auto-similaires grâce à la transformée¹ qui porte son nom [46]. Cependant, les processus auto-similaires stationnaires ne peuvent exister en tant que fonctions ordinaires mais seulement comme des distributions [134, 149]. En effet, l'hypothèse que $\{X(t), t > 0\}$ est un processus stationnaire et auto-similaire impose que

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, X(t) \stackrel{d}{=} X(ct) \stackrel{d}{=} c^H X(t). \quad (\text{I.18})$$

Seul le processus identiquement nul peut respecter ces égalités en loi.

Cette difficulté peut être partiellement contournée grâce à la notion de processus généralisé que l'on peut naïvement voir comme l'équivalent de la notion de "processus au sens des distributions". Autrement dit, le processus n'est plus défini par les valeurs qu'il prend ; seuls sont considérés les produits scalaires avec des fonctions tests :

$$X(\varphi) = \int X(t)\varphi(t)dt \quad (\text{I.19})$$

où les fonctions φ appartiennent à un espace de fonctions bien choisi. Si les fonctions φ sont à support compact, $\int c^{-H} X(ct)\varphi(t)dt$ est équivalente à $\int c^{-H} X(0)\varphi(t)dt$. Stationnarité et auto-similarité deviennent compatibles pour les processus généralisés définis relativement à un espace de fonctions à support compact d'intégrale nulle $\int \varphi(t)dt = 0$. Parmi ces fonctions tests, nous pouvons penser aux ondelettes. Les propriétés de stationnarité d'un processus auto-similaire au sens strict ne pourront concerner que ses accroissements ou ses coefficients d'ondelettes par exemple.

Remarquons cependant que cette incompatibilité entre auto-similarité et stationnarité est essentiellement liée à l'extension de la propriété d'invariance d'échelle aux échelles infiniment grandes que suppose l'auto-similarité. La stationnarité n'est pas incompatible a priori avec une invariance d'échelle asymptotique limitée aux petites échelles.

1.6 Spectre des processus auto-similaires

Les observations du paragraphe précédent nous confrontent directement à la difficulté de définir la notion de spectre de Fourier d'un processus auto-similaire. Deux alternatives s'offrent à nous qui exploitent toutes les deux la stationnarité des accroissements lorsqu'elle est vérifiée. Une première possibilité consiste à utiliser une décomposition temps-fréquence (spectre de Wigner Ville) ou temps-échelle (ondelettes) pour définir l'équivalent d'un spectre [91]. La seconde option s'appuie sur la notion de mesure spectrale d'un processus stochastique [42] lorsqu'il peut être défini comme une intégrale stochastique relativement à un mouvement brownien par exemple. Ces deux approches proposent de façon cohérente un spectre en $1/|\omega|^{2H+d}$ pour le mouvement Brownien fractionnaire. Il reste ainsi

¹ Étant donné $H \geq 0$, la transformée de Lamperti d'un processus stochastique $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par $t^H X(\ln t)$ pour $t > 0$; $X(t)$ auto-similaire $\Leftrightarrow e^{-tH} X(e^t)$ stationnaire.

pertinent de parler de spectre en “ $1/f$ ”, y-compris pour un processus auto-similaire donc non stationnaire.

Même si elle nécessite quelques précautions pour être correctement énoncée, l'idée qu'un objet auto-similaire “a un spectre en loi de puissance” est souvent utile dans les réflexions.

1.7 Lois d'échelle (scaling)

Lorsque les processus invariants d'échelle sont envisagés comme modèles possibles pour un systèmes physiques, l'hypothèse d'absence d'échelle caractéristique n'est nécessairement qu'une approximation. Plutôt qu'une auto-similarité véritable recouvrant toute la gamme d'échelle allant de zéro à l'infini, c'est généralement une auto-similarité relative qui est observée. En terme de modélisation, on identifie couramment la propriété d'invariance d'échelle à l'observation de comportements en loi de puissance de quantités multiéchelle (moments des accroissements, moments des coefficients d'ondelette...). Ces comportements en loi de puissance dans une gamme d'échelles suffisamment étendue sont appelés lois d'échelle ou *scaling* et font l'objet de la partie suivante.

2 Multiscaling et analyse multifractale

L'objet de cette partie est de rappeler très brièvement les fondements de l'analyse multifractale qui sert de base à la notion plus souple de *multiscaling*. Si l'analyse multifractale relève de l'*analyse* au sens fonctionnel et mathématique du terme, la notion de multiscaling est son pendant en terme de description de la structure multi-échelle de processus stochastiques pour la modélisation de systèmes physiques.

2.1 L'analyse multifractale

En gros, un objet est dit multifractal s'il est constitué comme un mélange complexe, un gaz de singularités locales. Pour être plus formel, il faut d'abord préciser ce que l'on entend par régularité et singularité. Soit $f(x)$ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $x_o \in \mathbb{R}$. Le degré de régularité de Hölder $h(x_o)$ de la fonction f en x_o s'évalue par comparaison avec une fonction algébrique selon

$$h(x_o) = \sup\{h' \mid f \in C_{x_o}^{h'}\}, \quad (\text{I.20})$$

où f appartient à $C_{x_o}^{h'}$ s'il existe un polynôme P_{x_o} tel que²

$$|f(x) - P_{x_o}(x)| \leq A|x - x_o|^{h'} \quad (\text{I.21})$$

pour tout x dans un voisinage de x_o . Dans le cas où le polynôme se résume à $P_{x_o}(x) = f(x_o)$, l'exposant $h(x_o)$ décrit le comportement localement en loi de puissance des accroissements :

$$|f(x) - f(x_o)| \underset{x \rightarrow x_o}{\simeq} C(x_o) |x - x_o|^{h(x_o)}. \quad (\text{I.22})$$

² Le degré du polynôme n'est pas nécessairement inférieur à h' .

On caractérise ainsi la rugosité du graphe de la fonction. Le comportement est d'autant plus singulier que h est proche de 0. Pour une fonction continue, on a toujours $h(x_o) \geq 0$. Une valeur $h(x_o) < 0$ correspond à un comportement extrêmement singulier et signe la présence d'une discontinuité.

Lorsque la régularité de Hölder $h(x)$ de la fonction f varie continûment, la fonction est dite *multifractionnaire*. Lorsqu'au contraire, cette régularité ponctuelle varie de façon très désordonnée, il devient souvent pertinent de caractériser les ensembles E_h de points sur lesquels la fonction est régularité de Hölder $h(x) = h$:

$$E_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / h = \text{exposant de régularité de Hölder de } f \text{ en } x \right\}. \quad (\text{I.23})$$

Pour quantifier l'importance relative de ces ensembles de points, on utilise la dimension de Hausdorff :

$$D(h) = \dim_H E_h. \quad (\text{I.24})$$

Lorsqu'elle fait sens, la fonction $D(h)$ est appelée *spectre multifractal* de la fonction f . Notons que, au prix d'un léger abus de langage, les physiciens n'hésitent jamais à remplacer dans leur esprit la dimension de Hausdorff par la dimension fractale, ce que nous ferons dans la suite. L'analyse multifractale nous fournit ainsi un outil pour quantifier géométriquement le poids des différentes singularités d'une fonction lorsque la régularité est elle-même très...irrégulière.

Remarque : la distinction entre modèle multifractionnaire et modèle multifractal est fondamentale. La régularité d'un champ spatial multifractionnaire varie de façon régulière (continue, voire dérivable) d'un point à un autre. Ainsi, bien que le comportement en un point puisse être singulier, cela suppose une certaine continuité et une certaine régularité du système. Sous cette hypothèse, on peut envisager de prédire une information au voisinage d'un point par interpolation. Un champ multifractal voit sa régularité ponctuel varier brutalement d'un point à un autre. Il peut être vu comme un mélange (aléatoire ou non) de gaz de singularités vivant sur des domaines fractals imbriqués les uns dans les autres. L'interpolation devient bien plus délicate.

2.2 Le formalisme multifractal

En pratique, les outils de l'analyse multifractale s'étendent aux trajectoires des processus stochastiques. Cependant, il est pratiquement inenvisageable d'estimer directement la fonction $D(h)$ à partir de données numériques. Il faudrait pour cela construire les ensembles E_h définis plus haut d'une part, et estimer les dimensions fractales de ces ensembles d'autre part. Lorsqu'il est valable, le *formalisme multifractal* introduit au début des années 1980 permet de contourner cette difficulté. Nous nous contentons de rappeler ici en quelques mots de quoi il s'agit et renvoyons le lecteur à [5, 16, 170] pour des présentations détaillées.

Selon la nature de l'objet d'analyse X , différents formalismes multifractals ont pu être établis en utilisant différentes quantités mesurant les variations de X à l'échelle a . Soit X un objet (mesure, fonction ou processus) multifractal. On note $T_X(a, t)$ un tel descripteur des variations de X à l'échelle a . Si X est une mesure μ , on choisira par

exemple $T_X(a, t) = \mu([t, t+a])$. Si X est un signal décrit par une fonction on pourra choisir la valeur absolue des accroissements $T_X(a, t) = |X(t+a) - X(t)|$. Pour mieux accéder au comportement singulier d'un signal comportant une tendance polynômiale, on pourra choisir $T_X(a = 2^j, t = k2^j) = |c_{j,k}|$ où $c_{j,k}$ désigne le coefficient d'ondelette de X à l'octave j et à la position k . Plus récemment, les coefficients d'ondelette ont pu être remplacés par les *coefficients dominants* ou *wavelet leaders* [127, 131] $d_{j,k} = \sup_{j' \leq j, |k'-k| \leq 2^{j-j'}} |c_{j',k'}|$ pour accéder à des estimations aux ordres $q < 0 \dots$ Si X est défini sur un intervalle I_0 , on définit alors la *fonction de partition* ou *fonction de structure* de X :

$$S_q(a) = \frac{1}{N(a)} \sum_{k=1}^{N(a)} T_X(a, k)^q \quad (\text{I.25})$$

où la somme est prise sur l'ensemble des $N(a)$ échantillons disponibles dans l'intervalle I_0 , pour tout $q \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$; q est l'ordre de la fonction de partition et $a \in \mathbb{R}^+$ est l'échelle. Dans le cas où l'on utilise la valeur absolue des coefficients d'ondelettes discrète $|c_{j,k}|$ ou les coefficients dominants $d_{j,k}$, on définit

$$S_q(j) = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} T_X(j, k)^q \quad (\text{I.26})$$

où $j = \log_2 a$ désigne l'octave associée à l'échelle considérée.

On définit alors les *exposants multifractals* $\zeta(q)$ (aussi notés $\tau(q)$ pour les mesures par la suite) associés au comportement en loi de puissance des fonctions de structure :

$$S_q(a) \sim a^{\zeta(q)} \implies \zeta(q) = \liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log S_q(a)}{\log a}. \quad (\text{I.27})$$

Ces définitions s'étendent naturellement en dimension $d \geq 2$. Même si l'estimation des exposants multifractals $\zeta(q)$ pose en elle-même quelques difficultés, voir chap.IV, elle s'avère bien plus aisée que celle de la fonction $D(h)$. Or, lorsqu'il est vérifié, le formalisme multifractal établit une correspondance par transformée de Legendre entre les exposants multifractals $\zeta(q)$ et le spectre multifractal $D(h)$. On peut alors écrire :

$$D(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (qh - \zeta(q)) + d \quad (\text{I.28})$$

où d est la dimension de l'espace sur lequel X est défini. Lorsque le formalisme multifractal n'est pas respecté, on dispose en général de résultats d'inégalité entre le spectre de Legendre (la transformée de Legendre de $\zeta(q)$) et $D(h)$. Lorsqu'on analyse des données expérimentales que l'on souhaite modéliser, le formalisme multifractal est supposé valable. L'expression imagée de "gaz de singularités" employée plus haut pour décrire à la main les objets multifractals renvoie à l'analogie entre formalisme multifractal et thermodynamique dont on trouvera une présentation détaillée dans [16]. L'ordre q s'interprète par exemple comme l'inverse d'une température. Ainsi, pour les grandes valeurs de q , la fonction de partition est dominée par les quelques singularités les plus fortes, comme s'il y avait condensation sur ces singularités.

2.3 La propriété de multiscaling

L'analyse multifractale concerne le comportement local des objets (mesures, fonctions, processus) et les quantités $\zeta(q)$ de (I.27) sont définis par une limite qui n'impose pas a priori que $\zeta(q)$ soit réellement caractéristique d'un comportement en loi de puissance dans une gamme d'échelle étendue mais seulement dans la limite des échelles infiniment petites. Cependant, pour la plupart des objets multifractals que l'on sait construire, voir chap. II & III, les exposants $\zeta(q)$ sont effectivement associés à un comportement en loi de puissance de la fonction de partition $S_q(a)$ dans une gamme d'échelle étendue mais bornée :

$$S_q(a) \sim a^{\zeta(q)}, \quad a_{min} \leq a \leq a_{MAX}. \quad (\text{I.29})$$

Les exposants multifractals sont alors vus comme des *exposants de lois d'échelle* ou exposants de *multiscaling* lorsque la fonction $\zeta(q)$ est non-linéaire. En pratique, la détermination de la gamme d'échelle $[a_{min}, a_{MAX}]$ est bien sûr un point important lors de l'estimation de $\zeta(q)$ qui est un problème en soi. Cette distinction entre exposants multifractals et exposants de lois d'échelle n'est pas complètement artificielle. Tandis que l'analyse multifractale renvoie à la régularité locale d'une trajectoire, les lois d'échelle renvoient plutôt à la structure de corrélation d'une mesure ou d'un processus aléatoire. Utiliser la notion de multiscaling, c'est implicitement établir un lien entre ces deux lectures, l'une qui relève de l'analyse, l'autre des probabilités. Ce lien sera précisé dans la partie 3.

En pratique, face à des données expérimentales telles un signal de vitesse mesuré dans un écoulement turbulent ou une texture naturelle, nous ne pourrions observer le comportement en loi de puissance caractéristique de l'invariance d'échelle que dans une gamme d'échelles limitée. Sans information extérieure, issue par exemple d'un argument physique d'analyse dimensionnelle ou d'une multitude d'observations similaires sur des systèmes semblables, parler d'invariance est risqué. À l'extrême, toute pente locale (une dérivée) dans un diagramme log-log pourrait s'interpréter comme l'exposant d'une loi de puissance... On est fondé à estimer des exposants de lois d'échelle à partir de données issues d'un écoulement turbulent grâce aux résultats théoriques d'invariance d'échelle dans la limite des nombres de Reynolds (Re) infinis en turbulence homogène isotrope [92] ; on est renforcé dans cette idée par les observations expérimentales multiples et cohérentes. Les observations et les estimations (par exemple à Re fini) se font dans une gamme d'échelles finie sur la base d'informations externes suggérant un comportement asymptotiquement invariant d'échelle dans une gamme d'échelle potentiellement plus grande (par exemple à $Re \rightarrow \infty$). La question se pose même de l'influence des bornes en échelle sur les comportements observés. Nottale [153] et Dubrulle & Graner [84, 85] ont même proposé des généralisations de la notion d'invariance d'échelle lorsqu'il existe une limite supérieure ou inférieure en échelle. Une autre généralisation possible est la définition des lois d'échelle infiniment divisibles que nous décrivons maintenant.

3 Lois d'échelle infiniment divisibles

3.1 Un peu d'histoire

En turbulence, de nombreuses analyses de données expérimentales et numériques ont été menées depuis les années 60 jusqu'à la fin des années 90 pour étudier les écarts attendus au modèle de Kolmogorov 1941 [123]. L'approche multifractale fait son apparition dans les années 1980, en turbulence notamment [93]. Les données expérimentales et numériques sont étudiées sous l'angle de l'invariance d'échelle. Les écarts à Kolmogorov 1941 peuvent par exemple être mis en évidence soit par les propriétés de multiscaling soit par le caractère de plus en plus étalé (non gaussien) des distributions des accroissements d'un signal de vitesse (fil chaud par exemple). On parle du *phénomène d'intermittence statistique*. Après les premières mesures de référence de Anselmet et al. (1984) [12], de nombreux travaux se sont appliqués à (in-)valider l'existence de cette *intermittence* ainsi que son éventuelle universalité [92]. Dans les années 1990, un ensemble de travaux dus notamment à Castaing, Gagne, Dubrulle et leurs collaborateurs [47, 50–53, 83] côté français, et à She & Waymire [194] et Novikov [156] côté américain, a proposé une extension de la notion d'invariance d'échelle à la notion de cascade log-infiniment divisible. Dans une lecture a posteriori, on trouve déjà les prémices de ces idées dans un article de Novikov en 1971 [154]! Le hasard des analyses expérimentales³ a parallèlement mené à la découverte de l'auto-similarité étendue (Extended Self-Similarity, la fameuse ESS) par Benzi et al. [40]. Les deux approches, inspirées par des arguments différents, s'avèrent parfaitement cohérentes. Pour plus de clarté, nous parlerons de lois d'échelle infiniment divisibles (infinitely divisible scaling) plutôt que de cascades infiniment divisibles pour éviter les confusions entre outil d'analyse (les lois d'échelle) et définitions de processus (les cascades), voir chap. III.

3.2 Définitions et propriétés

Nous rappelons brièvement la définition des cascades infiniment divisibles comme outil d'analyse de l'invariance d'échelle. Ma thèse en donne une présentation approfondie. L'idée fondamentale consiste à voir l'invariance d'échelle comme un mécanisme de relation entre échelles. Soit X un processus stochastique. Soit P_r la famille de distributions indexée par l'échelle $\ell \leq r \leq L$ associée à $Y_r = \ln |T_X(r)|$ où $T_X(r)$ est une quantité multiéchelle issue de X (accroissements, coefficients d'ondelette...), voir §2.2. Le processus X obéit à des lois d'échelle infiniment divisibles s'il existe une distribution G et une fonction réelle décroissante $n(r)$ telles que, pour tout $\ell \leq r_2 \leq r_1 \leq L$,

$$P_{r_2} = G^{*[n(r_2)-n(r_1)]} * P_{r_1}. \quad (\text{I.30})$$

où $*$ désigne le produit de convolution. La notation G^{*n} signifie “ G convoluée n fois” (en passant par la transformée de Laplace), voir l'équivalence avec la relation (I.31) ci-après. La distribution G est appelée *générateur* ou *noyau du propagateur* de la cascade ; la fonction $n(r)$ est appelée *profondeur* de la cascade. On montre que G est nécessairement une

³ D'après S. Ciliberto, c'est une erreur de manipulation des données qui aurait permis la première observation de l'auto-similarité étendue...

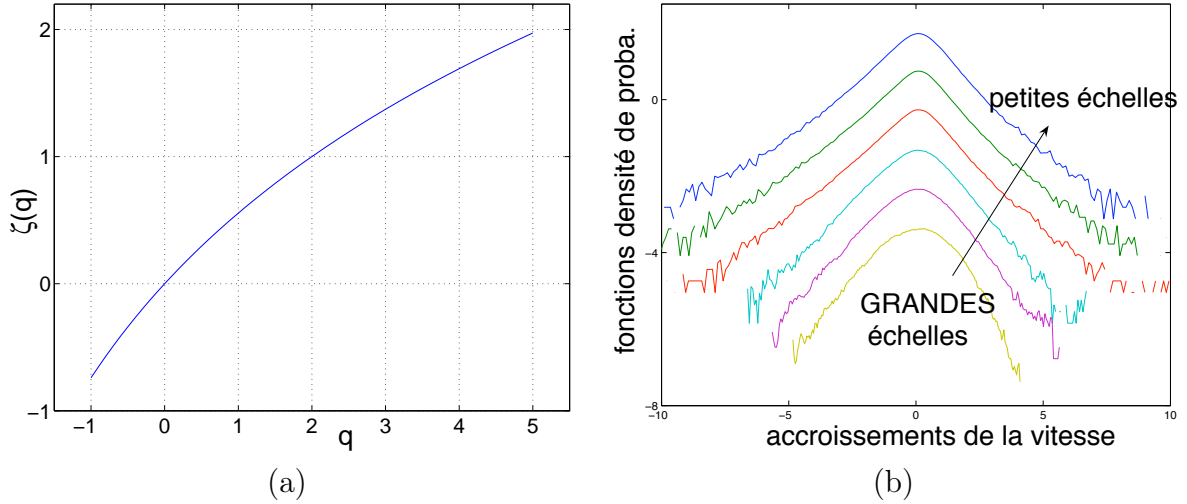


Fig. I.1: **(a)** Exposants multifractals $\zeta(q)$ des accroissements d'un champ de vitesse turbulent. **(b)** Évolution des fonctions densité de probabilité de quasi-gaussienne à grande échelle à non gaussienne aux petites échelles.

distribution infiniment divisible dont la fonction génératrice des moments peut s'écrire sous la forme $\tilde{G}(q) = e^{-H(q)}$. Lorsque $n(r) = -\ln(r/L)$, on retrouve l'invariance d'échelle classique et ses lois de puissance avec $\zeta(q) = H(q)$. Lorsque $G = \delta_H$ on retrouve l'auto-similarité du mouvement Brownien fractionnaire. L'équation (I.30) traduit l'évolution en échelle des distributions P_r de Y_r et correspond précisément à la description d'un phénomène d'intermittence statistique défini comme l'observation d'écarts de plus en plus importants des distributions des $T_X(r)$ à la loi gaussienne lorsqu'on s'intéresse aux variations à des échelles de plus en plus petites, voir figure I.1. Nous y reviendrons dans le §3.4.

Dans le cas général, l'invariance d'échelle ainsi décrite est souple puisqu'elle se traduit par des lois d'échelle relatives entre moments d'ordre différents. En effet, grâce à une simple transformée de Laplace, (I.30) équivaut à

$$\mathbb{E}|T_X(r_2)|^q = e^{-H(q)[n(r_2)-n(r_1)]} \cdot \mathbb{E}|T_X(r_1)|^q, \quad (\text{I.31})$$

qui se réécrit pour $r = r_2 \leq r_1 = L$ en imposant $n(L) = 0$

$$\mathbb{E}|T_X(r)|^q = e^{-H(q)n(r)} \cdot \mathbb{E}|T_X(L)|^q. \quad (\text{I.32})$$

Pour des ordres p et q tels que les moments de $|T_X(r)|$ sont bien définis, on en déduit les lois d'échelle relatives associées à l'auto-similarité étendue (ESS)

$$\mathbb{E}|T_X(r)|^q = (\mathbb{E}|T_X(r)|^p)^{H(q)/H(p)}. \quad (\text{I.33})$$

Remarquons que ce type d'approche ne peut pas décrire une éventuelle dissymétrie entre valeurs positives et négatives de $T_X(r)$ à cause de la présence d'une valeur absolue. Malgré cette limitation, une partie importante de mon travail de thèse avait consisté à exploiter ces lois d'échelle infiniment divisibles pour tenter de quantifier finement l'importance du

rôle joué par les structures cohérentes dans le phénomène d'intermittence observé sur des signaux de vitesse turbulents issus d'un fil chaud. La modélisation par des lois d'échelle infiniment divisibles nous a permis de travailler séparément sur la fonction $H(q)$ associée au générateur et la profondeur $n(r)$ associée à la dépendance en échelle. Elle nous a aussi amenés à réfléchir en profondeur sur les constructions possibles de processus stochastiques obéissant à des lois d'échelle. Cette réflexion est à l'origine de nos travaux sur les cascades infiniment divisibles (comme outil de simulation et non d'analyse) que décrit la partie II.

3.3 Lien avec les cascades multiplicatives

Jusqu'aux années 2000, l'objectif des analyses de données en turbulence était essentiellement descriptif. La situation était très particulière puisque, dans le cadre de l'approche statistique, de nombreuses analyses et scénarios phénoménologiques ont été proposés sans qu'on sache identifier de fonction ou processus modèle obéissant de façon vraiment satisfaisante aux propriétés que l'on prétendait observer. Ce travail de modélisation purement "descriptive" était et reste important puisqu'il s'agit de proposer une approche statistique de modélisation alternative, voire complémentaire, aux équations de Navier-Stokes. Cependant, il semble que nous n'aurons pas gagné grand chose si l'on ne connaît pas plus de processus obéissant à des comportements statistiques tels que ceux évoqués ici que de solutions aux équations de Navier-Stokes... Sans modèle stochastique constructif dont on puisse proposer une simulation numérique, nous ne pourrions aboutir qu'à des prédictions d'une portée physique limitée.

Dans la quête de modèles stochastiques ayant des propriétés en échelle prescrites, une famille de modèles joue un rôle essentiel : les cascades multiplicatives introduites par l'école russe, en particulier Novikov & Stewart (1964) [157] et Yaglom (1966) [216], puis formalisées par Mandelbrot (1974) [139]. Les lois d'échelle infiniment divisibles sont intimement liées à ces cascades multiplicatives. Nous reviendrons en détail sur cette parenté dans la partie II. Remarquons simplement que la relation de convolution (I.30) se traduit par l'égalité en loi caractéristique d'une propriété d'invariance d'échelle :

$$|T_X(r_2)| \stackrel{d}{=} W^{[n(r_2)-n(r_1)]} \cdot |T_X(r_1)| \quad (\text{I.34})$$

où W est une variable aléatoire indépendante de $T_X(r_1)$ et $T_X(r_2)$ distribuée par la loi G . Beaucoup de travaux [39, 59, 66, 154, 155, 162, 177, 194, 206] ont d'ailleurs été consacrés à l'étude de ce que l'on a appelé les *multipliers*, les *random multiplicative factors* ou *breakdown coefficients* selon les auteurs, inspirés à la fois par la phénoménologie originelle de Richardson (1922) [168] et par les cascades multiplicatives. Il s'agit cependant de bien distinguer l'égalité en loi ci-dessus d'une correspondance constructive reposant sur une égalité vraie (où devrait aussi apparaître une localisation spatiale de $T_X(r_1)$ et $T_X(r_2)$).

3.4 Equation de Fokker-Planck en échelle

Nous avons remarqué plus haut que l'équation (3.2) traduisait l'évolution des distributions des quantités $Y_r = \ln |T_X(r)|$ et indirectement des $T_X(r)$ avec l'échelle r , voir

figure I.1. En effet, la relation (I.30) décrit la solution d'une équation de Fokker-Planck. Le générateur ou noyau G peut être vu comme la fonction de Green de cette équation. Ce lien entre lois d'échelle infiniment divisibles et équation de Fokker-Planck a été initialement proposé par Castaing (1997) [49] dans un article resté relativement confidentiel. Il a été utilisé dans [152] pour décrire le phénomène d'intermittence en turbulence. Nous l'avons adapté à la modélisation statistique des images naturelles [57] grâce au parallèle entre l'intensité $I(\mathbf{x})$ dans une image et la dissipation ε dans un écoulement turbulent. En turbulence, la quantité $T_X(r)$ pourra par exemple représenter la dissipation moyennée sur une boule de rayon r , notée ε_r , ou les coefficients de la transformée en ondelettes d'un signal de vitesse turbulent $T_v(r)$. Pour les images naturelles, elle représentera l'intensité d'une image moyennée sur une zone de taille r , notée I_r , ou les coefficients d'ondelette $T_I(r)$ à l'échelle r ; nous y reviendrons au §V.1.3.4.

Nous considérons d'abord le cas le plus simple où G est un noyau gaussien pour lequel $H(q) = -C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2$ dans (I.32). Alors en utilisant la fonction génératrice des moments $\tilde{P}_r(q) = \mathbb{E}[e^{qY_r}] = \mathbb{E}[T_X(r)]^q$ on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r(q) &= e^{-H(q) \cdot n(r)} \cdot \tilde{P}_1(q) \\ &= \exp \left[\left(C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2 \right) \cdot n(r) \right] \cdot \tilde{P}_1(q), \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

où les C_k sont les cumulants de G . En dérivant par rapport à $n(r)$ et en utilisant la correspondance entre q dans le développement $H(q) = -C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2$ et les dérivées dans l'opérateur $\mathcal{U} = -C_1 \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{C_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial n} = \left(C_1 q + \frac{C_2}{2} q^2 \right) \tilde{P}_r(q) \quad (\text{I.36})$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial}{\partial Y} \equiv -q$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P_r}{\partial n} = -C_1 \frac{\partial P_r}{\partial Y} + \frac{C_2}{2} \frac{\partial^2 P_r}{\partial Y^2} \\ P_{r=L} = P_L \quad (n(L) = 0). \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

Ainsi P_r vérifie une équation de Fokker-Planck. La condition aux limites est déterminée par la donnée de P_L , la distribution à grande échelle. On obtient l'équation d'évolution de la partie symétrique \underline{P}_r de la distribution des $T_X(r)$ en utilisant la relation $P_r(\ln |T_X|) = T_X \underline{P}_r(T_X)$ pour obtenir l'équation de Fokker-Planck non-linéaire d'évolution de $\underline{P}_r(T_X)$:

$$\frac{\partial \underline{P}_s}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial T_X} \left[\left(C_1 + \frac{C_2}{2} \right) T_X \underline{P}_s \right] + \frac{\partial^2}{\partial T_X^2} \left[\frac{C_2}{2} T_X^2 \underline{P}_s \right] \quad (\text{I.38})$$

En turbulence, les analyses de données expérimentales et numériques montrent toutes que \underline{P}_L est en très bonne approximation gaussienne pour les accroissements du champ de vitesse. Dans les images naturelles, \underline{P}_L n'est pas déterminée a priori; on peut néanmoins s'attendre à ce que \underline{P}_L soit en général quasi-normale par un argument de limite centrale

puisque les variations d'intensité à l'échelle L sont la somme des variations aux échelles inférieures. L'intermittence statistique se traduit donc dans les deux cas par l'évolution de la distribution de la quantité multirésolution $T_X(r)$ (accroissement, coefficient d'ondelette,...) de proche de la gaussienne à grande échelle à fortement non gaussienne aux petites échelles, voir figure I.1.

Le raisonnement précédent s'étend aux autres distributions infiniment divisibles grâce à la théorie des semi-groupes [54, 87] et (I.37) prend la forme générale :

$$\frac{\partial P_r}{\partial n} = \mathcal{U}P_r \quad (\text{I.39})$$

où \mathcal{U} est l'opérateur qui décrit l'évolution de P_r avec r . L'auto-similarité relativement à la dilatation avec $n(r) = -\ln(r/L)$ se lit alors explicitement comme une invariance par translation relativement au logarithme de l'échelle.

4 Conclusion

Le but de ce chapitre était de rassembler les définitions et propriétés essentielles dont nous aurons besoin dans le reste du document. Nous disposons ainsi d'un cadre pour décrire des signaux ou des images. Les prochains chapitres II & III concernent la construction de modèles invariants d'échelle. Le chapitre IV abordera quelques aspects de l'estimation des exposants de multiscaling, avant d'aborder des problématiques liées à la modélisation d'images dans le chapitre V.

II. Construction de mesures aléatoires à lois d'échelle

Les mesures aléatoires multifractales intéressent potentiellement des domaines aussi variés que la turbulence [92], la finance [140], l'hydrologie [182], le trafic informatique [133], ou même la physique statistique [72]. Si les cascades multiplicatives sont l'archétype des processus multifractals, c'est essentiellement à cause du caractère "explosif" des produits infinis de variables aléatoires qui leur confère des propriétés d'irrégularité et d'intermittence typiques des systèmes désordonnés.

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux avancées obtenues depuis 2001 pour la construction de mesures invariantes d'échelle tandis que le chapitre suivant sera consacré à la construction de processus ou marches aléatoires invariants d'échelle. Ainsi nous avons choisi d'organiser notre présentation en séparant deux familles d'objets de natures mathématiques différentes : les mesures d'une part, les processus ou marches d'autres part. Très grossièrement, une mesure associe un scalaire à un sous-ensemble de l'espace sur lequel elle est définie ; un processus aléatoire associe une valeur dans son espace d'état à un instant t ou plus généralement à un vecteur de coordonnées \mathbf{x} de son domaine de définition.

Le progrès à la fois conceptuel et pratique le plus considérable apporté par les nouvelles constructions de mesures invariantes d'échelle concerne le caractère continu en échelle de leurs propriétés. Si les cascades multiplicatives ont toujours été et restent le modèle multifractal de référence, elles faisaient jusqu'alors systématiquement intervenir un rapport d'échelles privilégié. En effet, à une cascade binomiale de Mandelbrot on peut associer un arbre dyadique (le même que celui de la transformée en ondelettes discrète) dont on retrouvera toujours la trace dans la structure de corrélation du résultat final. Par conséquent, le résultat d'une telle construction ne peut respecter ni stationnarité ni invariance d'échelle continue par dilatation.

La rencontre entre les *produits multifractals d'impulsions cylindriques* ou *Multifractal Products of Cylindrical Pulses* (MPCP) de Barral & Mandelbrot (2002) [33] du côté des mathématiciens et les idées de Schmitt & Marsan (2001) [190] du côté des physiciens ont permis de s'affranchir de cette contrainte pour obtenir des cascades multiplicatives "continues". Des idées très similaires étaient proposées indépendamment par Mumford & Gidas (2001) [149] dans la communauté image-vision ; nous y revenons plus en détail dans le chapitre V. En collaboration avec Rudolf Riedi (Rice Univ, Jouston) et Patrice Abry (2001-2005) [62–65], nous avons contribué à l'aboutissement de ces idées en les conciliant pour proposer la construction des cascades infiniment divisibles, une famille de mesures aléatoires à lois d'échelle multifractales ou infiniment divisibles. Le sujet était brûlant

puisque, parallèlement et indépendamment, Muzy & Bacry (2002,2003) [26, 150] ont travaillé dans un esprit très proche et démontré plusieurs résultats mathématiques essentiels sur ces constructions avant de les utiliser pour la modélisation de signaux financiers [24] notamment. Nous avons aussi proposé une généralisation en dimension $d \geq 2$ [56]. Enfin, une approche utilisant l'exponentielle d'une intégrale stochastique a été proposée par Schmitt (2003) [188] que nous avons ensuite approfondie en collaboration dans [189].

Nous rappelons les définitions et propriétés des cascades infiniment divisibles (CID). Nous nous intéressons à leurs différentes variantes en dimensions 1 et $d \geq 2$, ainsi qu'à l'introduction d'un écart contrôlé à l'invariance d'échelle en loi de puissance. Nous nous arrêtons sur la famille des cascades Poisson composées (CPC) avant de décrire succinctement les algorithmes de synthèse en abordant l'adaptation à une surface non plane, à commencer par la sphère. Enfin nous étudions les relations avec une construction reposant sur l'exponentielle d'une intégrale stochastique et décrivons une généralisation de cette dernière approche.

1 Cascades infiniment divisibles (CID)

1.1 Vers les cascades continues

L'ancêtre originel de toutes les cascades multiplicatives est la cascade binomiale, souvent appelée cascade de Mandelbrot [139], même si l'idée a d'abord été proposée par l'école russe, Yaglom (1966) [216] et Novikov & Stewart (1964) [157]. Les travaux de Kahane & Peyrière (1976) [116] ont permis de donner un sens mathématique précis à ces objets en déterminant leurs conditions d'existence et de non-dégénérescence. En effet, un produit infini de variables i.i.d. risque soit de diverger à l'infini, soit de converger vers 0. Ce travail a aussi permis de préciser la nature mathématique de l'objet limite résultant d'une cascade multiplicative : il s'agit de la densité d'une mesure aléatoire. Le bon objet d'étude est par conséquent plutôt la mesure que la densité. Cette distinction d'apparence très formelle pour le non-mathématicien s'avère en réalité cruciale d'un point de vue pratique. Nous parlerons donc de "densité" pour décrire le résultat d'une cascade multiplicative.

Si l'on adopte une lecture espace-échelle, la construction d'une densité binomiale s'appuie sur deux ingrédients : une grille dyadique $\{(x_{j,k}, r_{j,k}) = ((k + \frac{1}{2})2^{-j}, 2^{-j}), j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ dans le plan espace-échelle au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$ d'une part, et des multiplicateurs aléatoires $W_{j,k} > 0$ associés aux nœuds $(x_{j,k}, r_{j,k})$ de la grille d'autre part. Sans perte de généralité, fixons la gamme d'échelle à $]0, 1]$. Notons $Q_\ell(t)$ le résultat intermédiaire de la cascade à la résolution $\ell > 0$. Tandis que la littérature présente souvent Q_ℓ comme provenant d'une redistribution aléatoire de masse au sein de l'intervalle $[0, 1]$, une formulation équivalente consiste à voir $Q_\ell(x)$ comme le produit des multiplicateurs qui se trouvent dans un cône $\mathcal{C}_\ell(x) = \{(x', r') : \ell \leq r' \leq 1, x - r'/2 \leq x' \leq x + r'/2\}$ pointant sur la position x , voir fig. II.1(a) :

$$Q_\ell(x) = Q_{2^{-n}}(x) = \prod_{\{(j,k): 1 \leq j \leq n, k2^{-j} \leq x < (k+1)2^{-j}\}} W_{j,k}, \quad (\text{II.1})$$

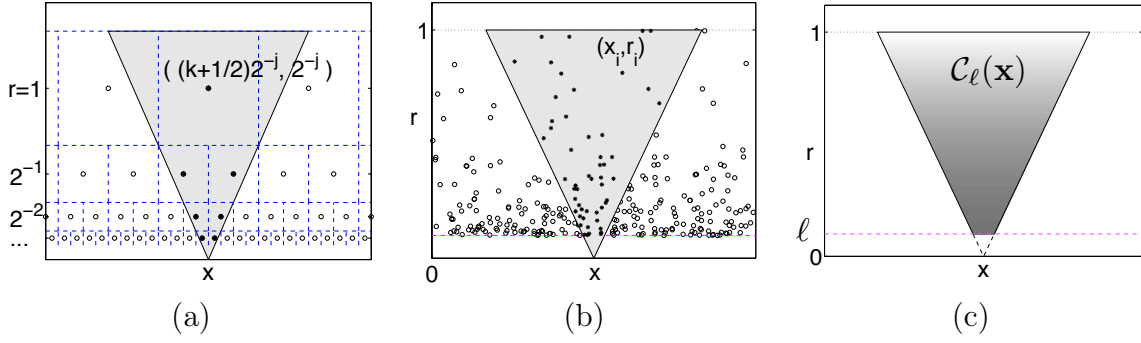


Fig. II.1: **Comparaison entre les constructions “espace-échelle” des cascades multiplicatives** : (a) cascade binomiale ; (b) cascade Poisson composée, (c) cascade infiniment divisible. La région grisée indique le cône contenant les multiplicateurs qui déterminent la valeur de la densité à la position x .

où $\mathbb{E}W_{j,k} = 1$ et $\ell = 2^{-n}$ après n itérations. La structure d’arbre dyadique sous-jacente induit une invariance d’échelle discrète seulement. De plus, la construction n’est pas invariante par translation de sorte que le résultat n’est pas stationnaire au sens strict.

On définit la mesure d’un intervalle I à l’étape n par $\mu_n(I) = \int_I Q_n(x)dx$, autrement dit $d\mu_n(x) = Q_n(x)dx$. Ces martingales positives convergent faiblement [115,116] vers une mesure limite multifractale notée μ . Remarquons que $Q_\ell(x)$ converge vers zéro presque sûrement et pour presque tout x quand $\ell \rightarrow 0$. Le caractère discret de l’invariance d’échelle obtenue se traduit notamment par la présence d’oscillations log2-périodiques dans les lois d’échelle.

Barral, Jin & Mandelbrot (2009) ont récemment étudié la généralisation de cette construction pour des multiplicateurs signés [34] voire complexes [32]. Les objets limites ne sont alors plus de même nature puisqu’il s’agit plutôt de fonctions ayant des propriétés comparables à celles d’un fBm.

La nature arborescente de la construction des cascades multiplicatives produit une structure de corrélation en log de l’échelle [17] :

$$\mathbb{E}[\log Q_\ell(x) \log Q_\ell(x+r)] \propto \log r \quad (\text{II.2})$$

C’est cette propriété que Schertzer & Lovejoy (1987) [182] ainsi que Bacry, Delour & Muzy (2001) [23] ont exploitée pour construire les premiers processus multifractals respectant une invariance d’échelle continue. Ils ont pour cela utilisé une synthèse dans l’espace de Fourier pour imposer le spectre en $1/k$ correspondant. Cette technique est possible pour une cascade log-normale seulement (dont les logarithmes des multiplicateurs sont distribués selon une loi normale).

Du côté des mathématiques, l’approche de Barral & Mandelbrot (2002) [33] a ouvert la voie vers les cascades à invariance d’échelle continue. Leur construction, les *produits multifractals d’impulsions cylindriques* ou *Multifractal Products of Cylindrical Pulses* en anglais (MPCP), ne conserve que les ingrédients essentiels des cascades binomiales tout en se débarrassant de leur structure arborescente. L’idée essentielle revient à remplacer

la grille dyadique des cascades binomiales par un processus de Poisson ponctuel (x_i, r_i) dans le plan espace-échelle d'intensité $dm(x, r)$ bien choisie, voir fig. II.1(b). L'invariance d'échelle par dilatation impose le choix

$$dm(x, r) = \frac{c \, dx dr}{r^2}, \quad (\text{II.3})$$

où c est une constante réelle positive. À chaque point (x_i, r_i) est affecté un multiplicateur aléatoire $W_i > 0$. Les W_i sont i.i.d.; nous noterons F la loi de $\log W_i$. On obtient un processus de Poisson ponctuel marqué. La densité des points est invariante par translation de sorte que les MPCP sont stationnaires. De plus, elle croît lorsque $r \rightarrow 0$ à la même vitesse que dans une grille dyadique. On définit l'impulsion cylindrique au point (x_i, r_i) par

$$P_i(x) = \begin{cases} W_i & \text{si } |x - x_i| \leq \frac{r_i}{2}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Le produit multifractal d'impulsions cylindriques convenablement normalisé est alors défini par :

$$Q_\ell(x) = \ell^{c(\mathbb{E}W-1)} \prod_{(x_i, r_i), r_i \geq \ell} P_i(x) \quad (\text{II.5})$$

Des lois d'échelle continue sans rapport d'échelle privilégié sont obtenues. Nous verrons que cette définition peut se réécrire autrement et prendre une forme plus générale.

Du côté de la physique, les idées de Schmitt & Marsan (2001) [190] ont joué un rôle essentiel dans la compréhension de la construction des cascades infiniment divisibles et des liens qu'elles entretiennent avec les MPCP de Barral & Mandelbrot. Même s'ils n'ont pas tout parfaitement formalisé, Schmitt & Marsan ont apporté l'idée de s'appuyer sur les mesures stochastiques additives indépendantes (voir plus bas) pour construire des cascades continues en échelle ainsi que le lien avec une écriture en terme d'exponentielle d'une intégrale stochastique dans le cas stable. La complémentarité de leur approche "à la physicienne" avec celle plus mathématique mais aussi moins accessible de Barral & Mandelbrot a permis la finalisation de la définition des processus multifractals issus de cascades infiniment divisibles.

1.2 Définitions

Nous donnons maintenant des définitions précises pour les cascades infiniment divisibles. Nous avons contribué avec R. Riedi et P. Abry à l'élaboration de ces définitions qui ont été aussi proposés indépendamment par Bacry & Muzy dans [25, 150]. Nous avons ensuite proposé et étudié [56] la généralisation de la construction en dimension $d \geq 1$. Par la suite, nous travaillons en dimension $d \geq 1$.

Soit G une distribution infiniment divisible de fonction génératrice des moments $\tilde{G}(q)$; cette fonction peut s'écrire sous la forme $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$ [87]. Soit $dm(\mathbf{x}, r) = g(r)d\mathbf{x}dr$ une mesure positive sur le demi-hyperplan $\mathcal{P}^+ := \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. Soit M une mesure stochastique infiniment divisible additive et indépendamment distribuée par G sur \mathcal{P}^+ et associée à la

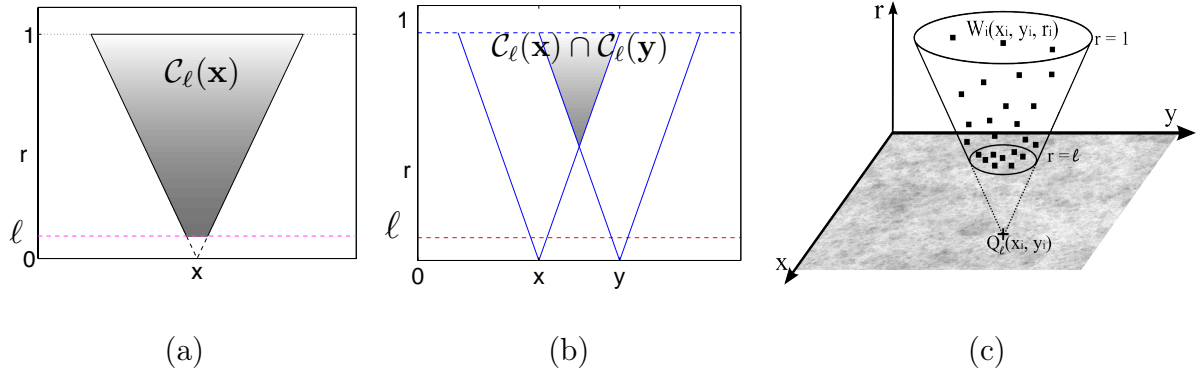


Fig. II.2: **Construction des Cascades Infiniment Divisibles.** (a) Le cône ombré indique la région qui détermine la valeur de la cascade à la position \mathbf{x} . (b) La dépendance entre $Q_\ell(\mathbf{x})$ et $Q_\ell(\mathbf{y})$, en particulier leur corrélation, est directement liée à la mesure de l'intersection des deux cônes $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ et $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{y})$. (c) Cas 2D : cône définissant $Q_\ell(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}(x, y)$. Pour une cascade Poisson composée, Q_ℓ est le produit des multiplieurs $W_i(x_i, y_i, r_i)$ appartenant à $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$.

mesure de contrôle $dm(\mathbf{x}, r)$. Pour tous sous-ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , $M(\mathcal{E}_1)$ et $M(\mathcal{E}_2)$ sont des variables aléatoires indépendantes et $M(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = M(\mathcal{E}_1) + M(\mathcal{E}_2)$. La mesure M est telle que $\mathbb{E}[\exp[qM(\mathcal{E})]] = \exp[-\rho(q)m(\mathcal{E})]$. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe II de notre article [64] ainsi qu'à [165] et [179] pour des définitions détaillées de mesures stochastiques additives indépendantes.

Définition (en dimension $d \geq 1$) [56, 64]

À la résolution $0 < \ell \leq 1$, soit $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ le cône d'influence¹, voir fig. II.2, défini pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ par $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{x}', r') : \ell \leq r' \leq 1, \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r'/2\}$. Une cascade infiniment divisible (CID) est une famille de processus $Q_\ell(\mathbf{x})$ à valeurs dans \mathbb{R} paramétrée par ℓ de la forme :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp[M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]}. \quad (\text{II.6})$$

Nous aurons besoin par la suite de la quantité

$$\varphi(q) = \rho(q) - q\rho(1) \quad (\text{II.7})$$

qui est telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$; φ est concave. De plus, $\varphi(2) < 0$. Le cas trivial $\rho(q) = 0$ (correspondant à $Q_r(t) \equiv 1$) est exclu de nos considérations.

Des choix possibles pour la distribution G sont la loi normale, la loi de Poisson, les lois de Poisson composées, Gamma, stables,...de sorte que de nombreuses possibilités sont

¹ Remarquons que la grande échelle dans la définition de $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ est arbitrairement fixée à 1 sans perte de généralité. Choisir une grande échelle L différente reviendrait simplement un changement d'unité $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot L$, $\ell \rightarrow r \cdot L$.

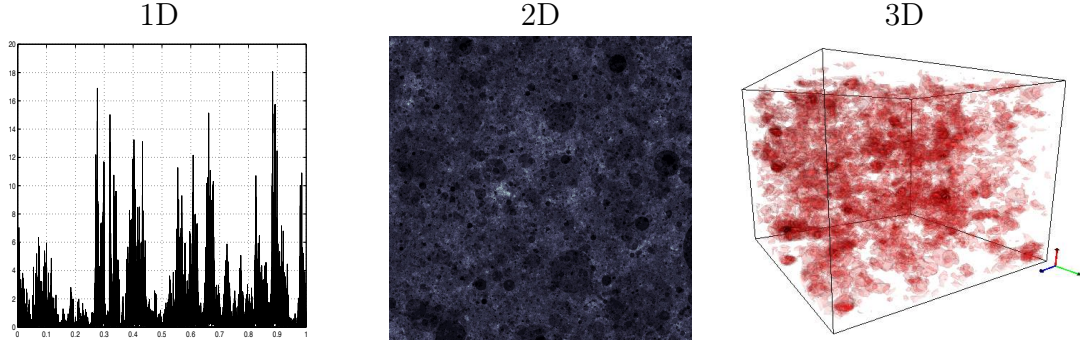


Fig. II.3: Exemples de cascades infiniment divisibles en dimensions 1, 2 et 3.

offertes pour la modélisation. Des exemples de réalisations en 1D, 2D et 3D sont présentés sur la figure II.3.

Une propriété sympathique des cascades infiniment divisibles est l'interprétation géométrique de leurs corrélations qui sont contrôlées par l'intersection des cônes $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}) \cap \mathcal{C}_\ell(\mathbf{y})$ dans \mathcal{P}^+ , voir fig. II.2(b). Un choix convenable de la fonction $g(r)$ dans la définition de la mesure de contrôle $dm(\mathbf{x}, r) = g(r)d\mathbf{x}dr$ permettra ainsi d'obtenir des lois d'échelles en lois de puissance parfaites ou approchées.

En dimension 1, dans le cas où la mesure M est une mesure Poisson composée, à laquelle on peut associer un processus de Poisson marqué (x_i, r_i, W_i) tel que celui évoqué plus haut dans la construction des MPCP, et pour le choix $g(r) = 1/r^2$, on retrouve la définition II.5 qui peut se réécrire sous la forme illustrée par la figure II.1(b) :

$$Q_\ell(x) = \frac{\prod_{(x_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(x)} W_i}{\mathbb{E} \left[\prod_{(x_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(x)} W_i \right]} = \frac{\prod_{(x_i, r_i), r_i \geq \ell} W_i^{1_{[|x-x_i| \leq r_i/2]}}}{\mathbb{E} \left[\prod_{(x_i, r_i), r_i \geq \ell} W_i^{1_{[|x-x_i| \leq r_i/2]}} \right]}. \quad (\text{II.8})$$

où $1_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$. Les MPCP peuvent être vus comme des Cascades de Poisson Composées (CPC), une sous-famille des CID.

Cette dernière écriture suggère l'extension des définitions précédentes à un cadre plus général grâce à l'introduction d'un "motif" ou noyau d'intégration $f(\mathbf{x})$ à la place de la fonction indicatrice (ou noyau cylindrique) utilisée par les MPCP :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\prod_i W_i^{f(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{r_i})}}{\mathbb{E} \left[\prod_i W_i^{f(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{r_i})} \right]} \quad (\text{II.9})$$

où $f(\mathbf{x})$ est de maximum 1 et à décroissance rapide voire à support compact (ex : le disque $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < 1/2\}$). Ainsi, $f(\mathbf{x})$ est une impulsion "douce", telle qu'une oscillation d'un cosinus carré : $f(\mathbf{x}) = \cos^2(\pi\mathbf{x})$ si $|\mathbf{x}| \leq 1/2$ et 0 sinon, voir fig. II.4(a). Finalement, on pourrait même choisir une fonction pratiquement quelconque, à des fins de rendu esthétique par exemple en synthèse de texture, fig. II.4(c)&(d). La caractérisation précise des propriétés mathématiques des objets obtenus pour un choix "quelconque" de f

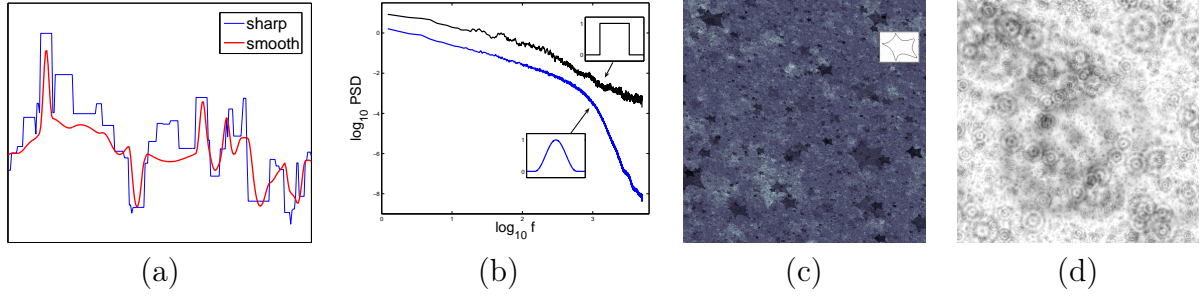


Fig. II.4: **Effet de régularisation du noyau d'intégration** : (a) réalisations obtenues en utilisant les mêmes variables aléatoires $\{W_i, x_i, y_i, r_i\}$ mais à partir de noyaux différents $f_1(x) = \mathbb{I}_{\{|x| < 1/2\}}$ et $f_2(x) = \cos^2(\pi x) \cdot \mathbb{I}_{\{|x| < 1/2\}}$. (b) comparaison entre les spectres des deux réalisations. L'utilisation d'un noyau régulier f implique un comportement plus régulier (aux petites échelles) de Q_ℓ . (c) & (d) Exemples de CID avec des noyaux particuliers : la géométrie du noyau influence la structure locale du champ, ici des textures 2D.

serait un travail difficile. La définition la plus générale que nous puissions proposer s'écrit finalement :

Définition (avec noyau d'intégration). [56, 57]

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp \int_{\ell \leq r' \leq 1} f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{r'}\right) dM(\mathbf{x}', r')}{\mathbb{E} \left[\exp \int_{\ell \leq r' \leq 1} f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{r'}\right) dM(\mathbf{x}', r') \right]} \quad (\text{II.10})$$

Cette définition peut s'avérer utile pour différentes raisons. Le noyau cylindrique des MPCP a des contours abrupts qui engendrent des variations brutales de $Q_\ell(\mathbf{x})$ aux petites échelles. L'utilisation d'un noyau plus régulier atténue les discontinuités, voir fig. II.4(a). La construction est aussi mieux localisée en échelle en évitant de "polluer" les hautes fréquences, ce qu'illustrent les spectres représentés fig. II.4(b).

Une autre généralisation des MPCP (II.5) a été proposée et étudiée dans [31] de la forme :

$$\tilde{Q}_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{(\mathbf{x}_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})} \tilde{P}_i(\mathbf{x})}{\mathbb{E} \left[\prod_{(\mathbf{x}_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})} \tilde{P}_i(\mathbf{x}) \right]} \quad (\text{II.11})$$

où $\tilde{P}_i(\mathbf{x}) = W_i \tilde{W}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{r_i}\right) 1_{\mathcal{D}(\mathbf{x}_i, r_i)} + 1_{\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, r_i)}$; $\mathcal{D}(\mathbf{x}_i, r_i)$ est le disque de R^d de centre \mathbf{x}_i et de rayon r_i , et $\tilde{W}(\mathbf{x})$ est une fonction positive de $L^1(\mathcal{D}(0, 1/2))$ telle que $\int_{\mathcal{D}(0, 1/2)} \tilde{W} = 1$. Bien que cette proposition paraisse naturelle tant qu'il s'agit des cascades de Poisson composées, la généralisation aux cascades infiniment divisibles s'avère difficile. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser (II.9) & (II.10) et non (II.11).

1.3 Conséquences immédiates de la définition

Q_ℓ est un processus stochastique stationnaire positif tel que $\mathbb{E}Q_\ell = 1$. La stationnarité est une conséquence directe de l'invariance par translation de la *mesure de contrôle*

$dm(\mathbf{x}, r) = g(r)d\mathbf{x}dr$ et de la définition du cône $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$. La distribution de $Q_\ell(\mathbf{x})$ est log-infiniment divisible [87]. Cette propriété est simplement due au fait que $\log Q_\ell$ est une variable aléatoire infiniment divisible de distribution G associée à la mesure aléatoire M . De nombreuses distributions sont possibles puisque la plupart des distributions dont les expressions sont connues explicitement (gaussienne, Poisson, Gamma, stables...) sont infiniment divisibles. Ainsi, nous disposons d'une grande famille de modèles non gaussiens pour décrire des champs scalaires ayant une structure de corrélation particulière en d dimensions.

Les propriétés des CID dans le cadre le plus général (II.10) sont essentiellement prescrites par la quantité :

$$\tau(q) = \int \varphi(qf(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \quad (\text{II.12})$$

si l'intégrale converge, voir Proposition 2.6 de [165]. Dans le cas où $f(\mathbf{x})$ est le noyau cylindrique, on a simplement $\tau(q) = \varphi(q)$. Dans les autres cas, le contrôle des lois d'échelles sera plus délicat puisque $\tau(q)$ combine des informations issues de $\varphi(q)$ et du noyau $f(\mathbf{x})$ de façon non-linéaire. Pour que les choses soient claires, nous noterons systématiquement les exposants de lois d'échelle par $\tau(q)$ ou $\zeta(q)$ dans le reste du document tandis que $\varphi(q)$ restera associée à la construction du processus.

Quelques résultats utiles sur les CID sont :

$$\mathbb{E}Q_\ell(\mathbf{x})^q = e^{-\tau(q)m_\ell(0)}, \quad (\text{II.13})$$

$$\mathbb{E}Q_\ell(\mathbf{x})Q_\ell(\mathbf{y}) = e^{-\tau(2)m_\ell(|\mathbf{y}-\mathbf{x}|)}, \quad (\text{II.14})$$

où

$$m_\ell(\mathbf{x}) = m(\mathcal{C}_\ell(0) \cap \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})), \quad \ell > 0. \quad (\text{II.15})$$

La relation (II.14) suppose implicitement que $\tau(2)$ existe. Il est possible que ce ne soit pas le cas pour certaines distributions G telles que les lois stables. En dimension 1, on a plus généralement, d'après le Lemme 1 de Bacry & Muzy [25], p. 457, pour $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_n$,

$$\mathbb{E}Q_\ell(z_1)Q_\ell(z_2)\dots Q_\ell(z_n) = \exp \left\{ - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{j-i+1} m_\ell(z_j - z_i) \right\}, \quad (\text{II.16})$$

où

$$\alpha_k = \varphi(k) - 2\varphi(k-1) + \varphi(k-2), \quad k \geq 2. \quad (\text{II.17})$$

Comme φ est une fonction concave, on a $\alpha_k \leq 0$. Cette propriété d'apparence technique joue un rôle important dans la démonstration de certains résultats. Il faut remarquer que le membre de droite ne fait intervenir que des intersections de cônes deux à deux.

1.4 Invariance d'échelle

En dimension 1, les cascades infiniment divisibles ont un comportement invariant d'échelle notamment lorsque la mesure de contrôle m est donnée par

$$dm(x, r) = \begin{cases} dx \frac{cdr}{r^2}, & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ 0, & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

ou par

$$dm(x, r) = \begin{cases} dx \left(\frac{cdr}{r^2} + c\delta_{\{1\}}(dr) \right), & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ 0, & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

où $c > 0$ est une constante et $\delta_{\{1\}}(dr)$ est la masse ponctuelle en $r = 1$. Nous reprenons ici les deux propositions "historiques", la nôtre (II.18) [64] et celle de Bacry & Muzy (II.19) [26, 150]. On peut aussi jouer sur la définition du cône $\mathcal{C}_\ell(x)$ sans modifier la mesure de contrôle (II.18). C'est le couple mesure de contrôle/cône qui détermine les propriétés de la mesure obtenue. Les mesures (II.18) et (II.19) sont telles que $m_\ell(0)$ se comporte en $-c \ln r$ lorsque $r \rightarrow 0$ puisqu'on a respectivement :

$$m_\ell(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 1, \\ -c \ln x + c(x-1), & \text{si } \ell < x \leq 1, \\ -c \ln \ell + cx(1 - \frac{1}{\ell}), & \text{si } 0 \leq x \leq \ell, \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$$m_\ell(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 1, \\ -c \ln x, & \text{si } \ell < x \leq 1, \\ -c \ln \ell + c(1 - \frac{x}{\ell}), & \text{si } 0 \leq x \leq \ell. \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Ces choix produiront des mesures multifractales et sont appelés *invariants d'échelle*. Le cas (II.19) mènera à ce que nous appellerons *invariance d'échelle exacte*; c'est l'égalité exacte $m_\ell(x) = -c \ln x$ pour $\ell < x \leq 1$ qui en est la clé.

Dans le cas de l'invariance d'échelle exacte, pour $t \in [0, 1]$,

$$\{Q_{\ell t}(tu), u \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} e^{\Omega_t} \{Q_\ell(u), u \in \mathbb{R}\}, \quad (\text{II.22})$$

où $\stackrel{d}{=}$ est l'égalité des distributions de dimension finie et Ω_t est une variable aléatoire indépendante de $\{Q_\ell(u)\}_{u \in \mathbb{R}}$ de fonction génératrice des moments :

$$E e^{q\Omega_t} = t^{c\varphi(q)}, \quad (\text{II.23})$$

où $\varphi(q)$ est donnée par (II.7). Dans le cas invariant d'échelle (II.18), pour $0 < \ell < b < 1$, on définit

$$Q_r^s(u) = \frac{Q_r(u)}{Q_s(u)}, \quad (\text{II.24})$$

de sorte qu'on a l'égalité au sens des distributions :

$$\{Q_\ell^b(bu), u \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{Q_{\ell/b}(u), u \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{II.25})$$

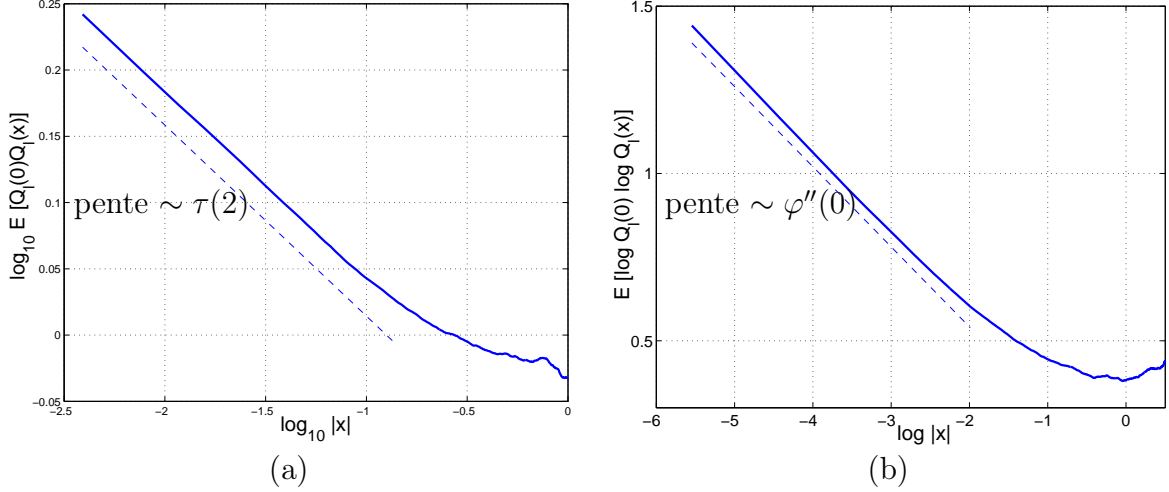


Fig. II.5: **Fonction d'autocorrélation estimée sur des cascades 2D.** (a) $\mathbb{E}[Q_\ell(0)Q_\ell(\mathbf{x})] \propto |\mathbf{x}|^{\tau(2)}$ sur 2 décades environ : l'exposant associé à la pente est prescrit par $\tau(2) = \varphi(2)$. (b) $\mathbb{E}[\log Q_\ell(0) \log Q_\ell(\mathbf{x})] \propto \log |\mathbf{x}|$ est la trace d'une structure de cascade multiplicative sous-jacente. La pente est prescrite par $\varphi''(0)$ parfois appelé coefficient d'intermittence.

En dimension $d \geq 1$, nous avons étudié la généralisation naturelle de la construction précédente [56]. Dans ce cas, les comportements d'invariance d'échelle en loi de puissance sont intimement liés au choix de la mesure de contrôle particulière :

$$dm(\mathbf{x}, r) = \frac{dr}{V_{1/2} r^{d+1}} d\mathbf{x}, \quad 0 < r \leq 1, \quad (\text{II.26})$$

où $V_{1/2}$ est le volume de la sphère de rayon $1/2$ en d dimensions (ex : $\pi/4$ en 2D). Dans ce cas, on a toujours $m(\mathcal{C}_\ell) = -\log \ell$, mais surtout on peut montrer que, au moins pour des cônes simples (circulaire, carré...), pour $\ell \leq |\mathbf{x}| \ll 1$:

$$m(\mathcal{C}_\ell(0) \cap \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})) = -\log |\mathbf{x}| + K + o(|\mathbf{x}|), \quad (\text{II.27})$$

où K est une constante dépendant de la géométrie choisie. On note $C_1 = \varphi'(0)$ et $C_2 = -\varphi''(0)$ les premier et second cumulants de la distribution de $\log Q_\ell$. Le cumulant C_2 est parfois appelé coefficient d'intermittence. On montre alors que, voir figure II.5 :

$$\mathbb{E}[Q_\ell(0)Q_\ell(\mathbf{x})] \propto |\mathbf{x}|^{\tau(2)} \text{ pour } |\mathbf{x}| \ll 1, \quad (\text{II.28})$$

$$\text{cov}(\log Q_\ell(0), \log Q_\ell(\mathbf{x})) \propto \varphi''(0) \log |\mathbf{x}| \text{ pour } |\mathbf{x}| \ll 1. \quad (\text{II.29})$$

Dans le cas de l'invariance d'échelle exacte en dimension 1 on obtient même des égalités pour $x \leq 1$. Nous retiendrons le comportement en loi de puissance de l'autocorrélation de Q_ℓ . De plus, nous remarquons que l'information partagée par $\log Q_\ell(0)$ et $\log Q_\ell(\mathbf{x})$ peut être intuitivement et quantitativement reliée au nombre d'ancêtres communs de $Q_\ell(0)$ et $Q_\ell(\mathbf{x})$ qui est par construction proportionnel à $\log |\mathbf{x}|$ ici. Ce comportement est illustré sur la figure II.5(b). Ce comportement logarithmique est cohérent avec l'observation d'un

spectre en loi de puissance pour le processus $\log Q_\ell(\mathbf{x})$. Par conséquent, la propriété d'invariance d'échelle, dans son interprétation minimale qu'est la présence d'un spectre en loi de puissance, peut être observée simultanément sur Q_ℓ et $\log Q_\ell$. Cette remarque s'avère particulièrement intéressante quant à la modélisation des images naturelles, chap. V. En effet, de nombreux auteurs [197] sont confus lorsqu'il s'agit de savoir s'ils parlent de l'invariance d'échelle de l'intensité $I(\mathbf{x})$ de l'image ou de son logarithme $\log I(\mathbf{x})$. Malgré un paradoxe apparent, les deux quantités peuvent avoir un spectre en loi de puissance [57].

Remarque : Rhodes & Vargas [167] ont très récemment proposé une nouvelle construction impliquant un processus aléatoire dans l'espace des isométries de \mathbb{R}^d qui permettrait d'obtenir une invariance d'échelle exacte en dimension d . Ce serait une étape supplémentaire par rapport à la construction basée sur les cônes qui ne permet de produire l'invariance d'échelle exacte qu'en dimension 1.

1.5 Convergence et non-dégénérescence

À ce stade, nous devons rappeler que, d'un point de vue purement mathématique, l'objet d'étude n'est pas Q_ℓ elle-même. Sans trop entrer dans les détails, à une résolution ℓ , Q_ℓ est la densité d'une mesure μ_ℓ telle que pour tout ensemble compact $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu_\ell(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} Q_\ell(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (\text{II.30})$$

À la limite $\ell \rightarrow 0$, on obtient (si elle est bien définie) la mesure μ telle que :

$$\mu(\mathcal{E}) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_{\mathcal{E}} Q_\ell(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (\text{II.31})$$

Il faut noter que la limite se trouve devant l'intégrale. En effet, l'objet limite $\lim_{\ell \rightarrow 0} Q_\ell(\mathbf{x})$ est trivial : il converge vers 0 presque sûrement et pour presque tout \mathbf{x} . La question de la convergence de la mesure μ_ℓ quand $\ell \rightarrow 0$ doit être traitée. Si le physicien a assez spontanément envie de laisser cette question de côté, il aurait bien tort de la négliger car elle a des conséquences pratique tout à fait tangibles dans les simulations numériques par exemple. Notamment l'existence des moments est nécessaire à l'étude des lois d'échelle. Rien n'assure non plus a priori que la mesure ne soit pas dégénérée.

La convergence dans \mathcal{L}^q pour quelque $q > 1$ assure que $\mathbb{E}\mu([0, t]) = t$ et implique la non-dégénérescence de μ [64]. À notre connaissance, il n'existe pas de résultat pour $q > 2$ dans le cas général mais seulement pour $1 < q \leq 2$. Dans le cas invariant d'échelle, des résultats sur les moments finis d'ordre positif sont donnés dans [25, 33, 150]. Le critère de convergence dans \mathcal{L}^2 utilise les propriétés des martingales (Proposition 1 de [64]). Une mesure infiniment divisible μ_ℓ converge dans \mathcal{L}^2 si et seulement s'il existe une constante K telle que pour tout $\ell > 0$

$$\mathbb{E}\mu_\ell([0, t])^2 = \int_0^t \int_0^t \exp\{-\varphi(2)m(\mathcal{C}_\ell(u) \cap \mathcal{C}_\ell(v))\} dudv < K.$$

Lorsque cette condition est vérifiée, μ est non dégénérée et $\mathbb{E}\mu([0, t]) = t$. On peut établir un critère de convergence dans \mathcal{L}^q pour $q \neq 2$ mais son énoncé est relativement technique

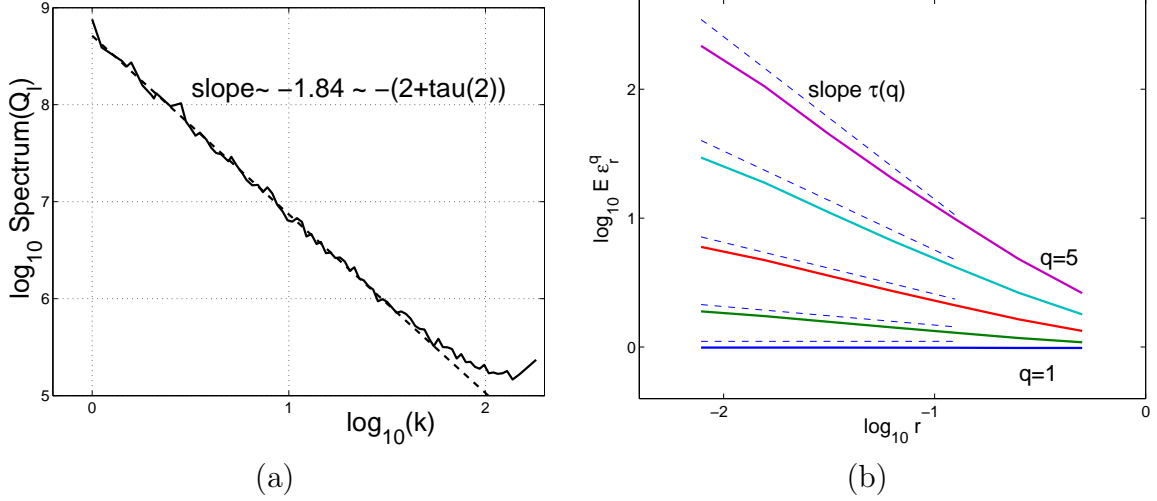


Fig. II.6: (a) Spectre en loi de puissance de $Q_\ell(\mathbf{x})$ en dimension 2 en fonction de $k = \|\mathbf{k}\|$ sur 2 décades : la pente observée correspond à l'exposant $\tau(2) = \varphi(2)$. (b) Lois d'échelle de la forme donnée par (II.36) pour les moyennes par boîte d'une CID 2D.

dans le cas général (Proposition 2 de [64]). Par contre, dans le cas invariant d'échelle, le critère s'énonce simplement pour $1 < q \leq 2$ sous la forme

$$(q - 1) + c\varphi(q) \geq 0. \quad (\text{II.32})$$

Pour $q = 2$, cette condition s'écrit $c\varphi(2) \geq -1$ (rappelons que $\varphi(2) \leq 0$).

Pour que la mesure μ soit non triviale, la loi G doit vérifier un critère de non dégénérescence [25, 33, 64, 116]. Dans le cas des cascades invariantes d'échelle, le critère est en dimension d (cf. convergence dans \mathcal{L}^q pour $q > 1$) : $\exists \epsilon > 1$ tel que $\zeta_\mu(1 + \epsilon) > 1$, où $\zeta_\mu(q) = qd + c\varphi(q)$ ou, puisque $\zeta_\mu(1) = 1$ en supposant que ζ_μ est suffisamment régulier [25, 33] :

$$\zeta'_\mu(1) = d + c\varphi'(1) > 0 \iff c\varphi'(1) > -d. \quad (\text{II.33})$$

Ce critère impose que $\varphi(q)$ ne soit pas trop violemment concave, autrement dit que le modèle ne soit pas “trop multifractal”. D'un point de vue pratique, même si la limite $\ell \rightarrow 0$ n'est jamais atteinte dans les simulations numériques, le critère de non dégénérescence doit être pris en compte. Sans précaution, la cascade Q_ℓ simulée risque de n'être qu'un ensemble d'immenses pics très localisés perdus au milieu d'un océan de zéros. Dans certains cas, cela peut se produire même pour des valeurs de ℓ qui ne sont pas si petites, par exemple $\ell \sim 0.01$). Nous insistons sur le fait que ce critère qui peut apparaître dans un premier temps comme une propriété mathématique abstraite est en réalité crucial et doit être pris en compte dans la pratique en vue de la modélisation et de la simulation.

1.6 Propriétés de multiscaling

1.6.1 Cas invariants d'échelle

Le premier indice usuel d'un comportement invariant d'échelle est l'observation d'un spectre en loi de puissance proportionnel à $1/k^\alpha$. Les CID ont précisément un spectre e loi de puissance $\propto 1/k^{d+\tau(2)}$ ($\tau(2) < 0$) illustré fig. II.6(a) pour une cascade 2D (en moyennant sur toutes les directions). En dimension 2, on observera aussi que le spectre de $\log Q_\ell$ est $\propto 1/k^2$ de façon cohérente avec l'autocorrélation $\propto \log |\mathbf{x}|$, voir (II.29).

Dans le cas invariant d'échelle, on démontre les propriétés d'invariance d'échelle de la mesure μ associée à Q_ℓ en s'appuyant sur les propriétés énoncées plus haut au §1.4. Les moyennes par boîtes définies comme

$$\varepsilon_\ell(r)(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r} \int_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r} Q_\ell(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \frac{1}{V_r} \mu_\ell(V_r), \quad (\text{II.34})$$

sont souvent utilisées pour déterminer des dimensions fractales. En dimension 1 et dans le cas de l'invariance d'échelle exacte (II.21), on a le résultat exact pour μ dans la limite $\ell \rightarrow 0$:

$$\mathbb{E}_{\varepsilon_r}(x)^q = r^{c\tau(q)}, \quad \forall r \leq 1. \quad (\text{II.35})$$

En dimension $d \geq 1$, l'ingrédient essentiel menant à des mesures multifractale est le choix d'une mesure de contrôle en $1/r^{d+1}$, voir (II.26). La construction décrite ci-dessus ne permet pas d'obtenir des lois de puissance exactes. On obtient seulement des lois de puissance approchées :

$$\mathbb{E}_{\varepsilon_r}(\mathbf{x})^q \sim r^{\tau(q)} \text{ pour } r \ll 1. \quad (\text{II.36})$$

La figure II.6(b) illustre les lois d'échelle observées sur des cascades 2D. En pratique, les estimés des exposants $\tau(q)$ s'identifient aux $\varphi(q)$ pour $q \in [q_-^*, q_+^*]$ seulement, voir chap. IV. Les valeurs précises des bornes q_-^* et q_+^* sont solution de $\varphi(q) - q\varphi'(q) = d$. Par conséquent, l'analyse des lois d'échelle ne permet a priori d'identifier $\varphi(q)$ que pour $q \in [q_-^*, q_+^*] \cup [0, 1]$.

1.6.2 Vers des écarts à l'invariance d'échelle

Notamment motivés par les questions posées par la modélisation des données de turbulence, nous nous sommes intéressés à la possibilité d'introduire un écart contrôlé à l'invariance d'échelle en loi de puissance sous la forme de lois d'échelles infiniment divisibles [64]. Nous avons étudié la latitude offerte par le choix de la forme de la mesure de contrôle dans la construction des CID, voir §I.3. En dimension 1 et sous certaines hypothèses assez techniques mais finalement vérifiées dans un grand nombre de cas, nous avons obtenu un résultat d'approximation du comportement des moments de la mesure μ issue d'une CID.

Les résultats énoncés dans ce paragraphe ne concernent que la dimension 1. Dans ce cas nous avons habituellement indexé les processus par le temps t et introduit la quantité

$$A_\ell(t) = \int_0^t Q_\ell(s) ds \longrightarrow A(t) = \mu([0, t]). \quad (\text{II.37})$$

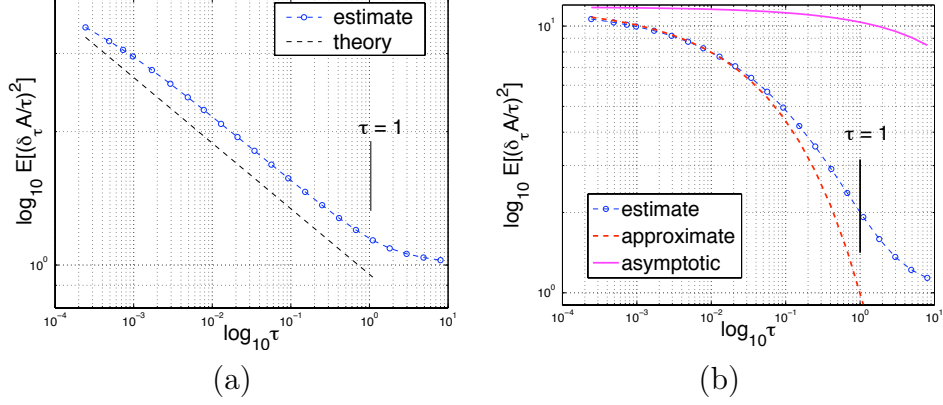


Fig. II.7: Cascades Poisson composées : (a) lois de puissance pour le cas invariant d'échelle illustré par $\log \mathbb{E}[(\delta_\tau A / \tau)^2]$ comparé à $c\varphi(2) \log \tau + Cte$; (b) écart aux lois de puissance pour le cas non invariant d'échelle illustré par $\log \mathbb{E}[(\delta_\tau A / \tau)^2]$ comparé à $-\varphi(2)m(\mathcal{C}_\tau) + Cte$.

Nous ferons plus tard référence à $A(t)$ comme un temps multifractal dans la construction des marches aléatoires multifractales, voir § III.1.

Pour $0 < b < 1$, on définit les quantités :

$$g^{(n)}(r) := b^{2n} g(b^n r) \cdot \mathbf{1}_{[0,1]} \quad (\text{II.38})$$

et

$$\Delta_{b,q}^{(n)}(t) := \frac{\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq b^n t} \left| Q_{b^n}^{b^{n-1}}(s)^q - Q_{b^n}^{b^{n-1}}(0)^q \right|}{\mathbb{E}[Q_{b^n}^{b^{n-1}}(0)^q]}. \quad (\text{II.39})$$

Théorème II.1: (théorème 1 p. 1069 de [64])

Soit $q > 0$, $b \in (0, 1)$, $\rho(\cdot)$ et $dm = g(r)dt dr$.

- (condition sur les moments) Si μ_ℓ converge dans \mathcal{L}^q ,
- (condition variationnelle) s'il existe $\nu > 0$ telle que $\Delta_{b,q}^{(n)}(t) \leq C_{b,q} t^\nu$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 < t \leq 1$,
- (condition de vitesse) et si $g^{(n)}$ converge,

alors il existe des constantes \overline{C}_q et \underline{C}_q telles que pour tout $t < 1$

$$\underline{C}_q t^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_t)] \leq \mathbb{E}A(t)^q \leq \overline{C}_q t^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_t)]. \quad (\text{II.40})$$

Comme $A(t)$ est à accroissements stationnaires, on peut aussi écrire pour $|\tau| < 1$

$$\underline{C}_q \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)] \leq \mathbb{E}\delta_\tau A^q \leq \overline{C}_q \tau^q \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\tau)]. \quad (\text{II.41})$$

Rappelons que \mathcal{C}_t est le cône de la définition des CID p.35 pour $\ell = t$. Notons que les hypothèses ci-dessus se simplifient considérablement dans le cas invariant d'échelle puisqu'alors $g^{(n)} = g$ pour tout n , $\Delta_{b,q}^{(n)}$ ne dépend plus de n et la condition sur les moments

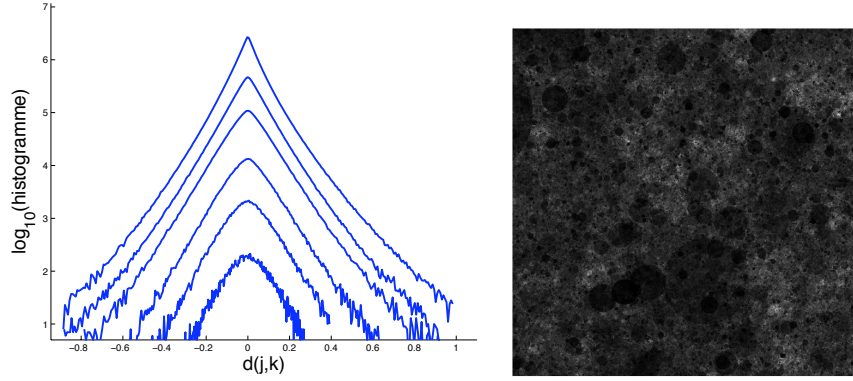


Fig. II.8: Illustration du phénomène d'intermittence statistique sur des cascades infiniment divisibles : on observe l'évolution des distributions des coefficients d'ondelettes de quasi-gaussiennes à grande échelle à fortement non gaussiennes à petite échelle.

(II.32) est facilement vérifiée. La *condition variationnelle* a un aspect très technique mais elle est vérifiée par les cascades normales et certaines cascades Poisson composées telles que $\mathbb{E}W^q < \infty$, ce qui assure un champ d'application relativement large au théorème.

Insistons d'emblée sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un résultat asymptotique dans la limite des petites échelles, mais bien d'un encadrement pour tout $0 < t < 1$. Cet encadrement peut être vu comme une caractérisation approchée du comportement en échelle de la mesure μ . Même s'il faut reconnaître qu'il s'agit d'un résultat assez technique, ce théorème représente le premier pas vers un écart contrôlé de l'invariance d'échelle en loi de puissance. En jouant sur la forme de $m(\mathcal{C}_t)$, on peut obtenir des comportements variés.

La figure II.7(b) illustre le cas où $m(\mathcal{C}_\tau) = c(1 - \tau^{-\beta})/(-\beta)$, pour $\beta = -0.4$ en comparaison avec le cas invariant d'échelle pour la même fonction $\varphi(q)$. De façon assez remarquable, l'écart à la loi de puissance est bien contrôlé par $m(\mathcal{C}_\tau) \neq -c \log \tau$. Ces observations numériques sont cohérentes avec le théorème précédent.

Une conséquence importante du théorème est que, dans le cas général où l'invariance d'échelle n'est pas supposée, les moyennes par boîtes obéissent aux lois d'échelle

$$\mathbb{E}\varepsilon_r(\mathbf{x})^q \simeq \exp[-\tau(q) m(\mathcal{C}_r)] \quad (\text{II.42})$$

où " \simeq " signifie l'existence d'un encadrement tel que (II.40) et (II.41). Les simulations numériques montrent que cet encadrement est pertinent et que l'approximation est bien contrôlée. Les moyennes par boîtes obéissent en bonne approximation à des lois d'échelle infiniment divisible et non plus à des lois de puissance telles que (II.36). En ce sens, les cascades infiniment divisibles entrent dans le cadre des lois d'échelle infiniment divisibles décrite au §I.3.

1.6.3 Intermittence

Une motivation essentielle pour la construction de processus tels que les cascades infiniment divisibles (CID) était la reproduction du phénomène d'intermittence évoqué au

§I.3. Les propriétés de multiscaling décrites plus haut vont exactement dans ce sens. Les CID reproduisent bien ce phénomène. La figure II.8 illustre l'intermittence des CID à travers l'évolution des distributions des coefficients d'ondelettes d'une CID en dimension 2. Les histogrammes estimés sont pratiquement gaussiens à grande échelle (une parabole en représentation lin-log) pour devenir fortement non gaussiens à petite échelle.

1.7 Algorithmes de synthèse

Pour la simulation numérique, il faut distinguer les algorithmes de synthèse des cascades infiniment divisibles, en distinguant les cascades Poisson composées et les autres cascades. Nous les avons programmés en Matlab et en C, en dimension 1. Seule la simulation des cascades Poisson composées s'adapte facilement en dimension $d \geq 2$, voir figure II.9(b). Les algorithmes sont décrits en détail dans [64]. Nous en rappelons les idées principales ci-dessous.

Nous notons $[0, T]$, avec $T > 1$ l'intervalle sur lequel la cascade est simulée et $\Delta_t \ll 1$ le pas d'échantillonnage. Les lois d'échelle seront prescrites pour $\ell \leq r \leq 1$. Les paramètres caractéristiques de la simulation sont donc $\ell/\Delta t$, $1/\Delta t$ et $T/\Delta t$.

1.7.1 Simulation des cascades Poisson composées

Pour la simulation des cascades Poisson composées, le processus ponctuel fournit un échantillonnage naturel du demi-plan temps-échelle (ou espace-échelle) \mathcal{P}^+ (voir fig. II.9(a)), ce qui rend les choses assez simples. Soit le trapèze $\Theta = \{(t', r') : r \leq r' \leq 1, -r'/2 \leq t' \leq T + r'/2\}$. Après avoir déterminé le nombre N_p de points et de multiplicateurs nécessaires à la simulation de $Q_\ell(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$, on tire N_p points aléatoires (t_i, r_i) à l'intérieur du trapèze Θ , avec la densité $dm(t, r)$, ainsi que les N_p multiplicateurs W_i associés. Q_ℓ est initialisée à 1 partout. Pour chaque multiplicateur, on détermine l'ensemble des échantillons de Q_ℓ qui sont affectés et on modifie les valeurs des échantillons de Q_ℓ concernés. Il faut enfin normaliser Q_ℓ . Une version approchée de la mesure $\mu_\ell([0, t]) = A_\ell(t)$ s'obtient par intégration discrète de $Q_\ell(t)$:

$$\mu_\ell([0, t]) = A_\ell(t) = \sum_{0 \leq k \leq t/\Delta t} Q_\ell(t_k) \cdot \Delta t. \quad (\text{II.43})$$

Cet algorithme est très facile à programmer pour un coût de calcul relativement faible. L'algorithme est le même en dimension $d \geq 2$ en utilisant le cône adapté. Pour réduire le temps de calcul, on balaie les multiplicateurs W_i en recherchant les valeurs de Q_ℓ affectées plutôt que l'inverse : la boucle s'effectue ainsi sur les données non structurées, tandis que la recherche de voisinage se fait sur des données structurées. Enfin on peut facilement écrire une version causale en réduisant le cône $\mathcal{C}_\ell(t)$ à sa moitié gauche.

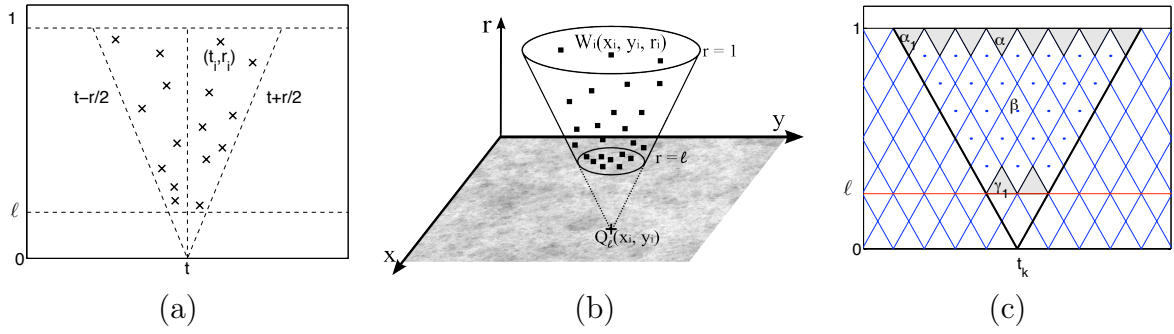


Fig. II.9: (a) Les cascades Poisson composées sont construites à partir d'un processus de Poisson marqué $\{(t_i, r_i, W_i)\}$. (b) Synthèse d'une CPC en dimension 2. (c) La simulation des autres cascades infiniment divisibles nécessite une discrétisation a priori du plan temps-échelle : schéma des différents sous-ensembles triangulaires (\blacktriangledown , \blacktriangle) et losange (\blacklozenge) qui contribuent à $Q_\ell(t_k)$. Cette représentation schématisée se traduit sous la forme d'une matrice $\Psi(t_k)$ dans l'algorithme.

1.7.2 Autres cascades infiniment divisibles

La simulation des autres cascades telles que la cascade normale qui repose sur une mesure gaussienne n'appartenant pas à la famille des cascades Poisson composées nécessite un échantillonnage de la mesure aléatoire M sur \mathcal{P}^+ . Pour limiter les problèmes de mémoire éventuels, nous utilisons un algorithme causal pour simuler $Q_\ell(t)$ pour $\{t_k = k\Delta t, k \in \mathbb{N}\}$. La figure II.9(c) donne une vision schématique de l'algorithme. La période d'échantillonnage est choisie comme l'inverse d'un entier $\Delta t = 1/\lambda_t$ tandis que la résolution est choisie telle que $\ell = \lambda_\ell \Delta t$, avec $\lambda_t, \lambda_\ell \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, une discrétisation naturelle de \mathcal{P}^+ apparaît sous la forme de triangles "tête baissée" \blacktriangledown portant une mesure aléatoire notée α , de losanges \blacklozenge portant une mesure notée β , et de triangles "tête en l'air" \blacktriangle portant une mesure notée γ , voir figure II.9(c). À chaque instant t_k , les termes qui contribuent à $Q_\ell(t_k)$ peuvent être rassemblés dans la matrice triangulaire $\Psi(t_k)$:

$$\Psi(t_k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{\lambda_t} \\ & \beta_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{1,\nu_1} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \beta_{\nu_0,\nu_0} & \dots & \dots & \beta_{\nu_0,\nu_1} \\ & & & & \gamma_1 & \dots & \gamma_{\lambda_r} \\ & & & & & \mathbf{0}_{\lambda_r-1} & \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

où $\nu_0 = \lambda_t - \lambda_r - 1$ and $\nu_1 = \nu_0 + \lambda_r = \lambda_t - 1 > \nu_0$; $\mathbf{0}_{\lambda_r-1}$ est une matrice de zéro de taille $\lambda_r - 1$. $\Psi(t_k)$ est une matrice carrée de taille $\lambda_t \times \lambda_t$. On note par $D(t_k)$ sa diagonale et $C_{\lambda_t}(t_k)$ sa dernière colonne :

$$\begin{cases} C_{\lambda_t}(t_k) &= (\alpha_{\lambda_t}, \beta_{1,\nu_1}, \dots, \beta_{\nu_0,\nu_1}, \gamma_{\lambda_r}, 0_{\lambda_r-1}) \\ D(t_k) &= (\alpha_1, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{\nu_0,\nu_0}, \gamma_1, 0_{\lambda_r-1}) \end{cases}$$

La matrice $\Psi(t_k)$ joue le rôle d'une matrice "mémoire" du processus qui propage la structure de corrélation. Pour une distribution infiniment divisible G (de fonction génératrice

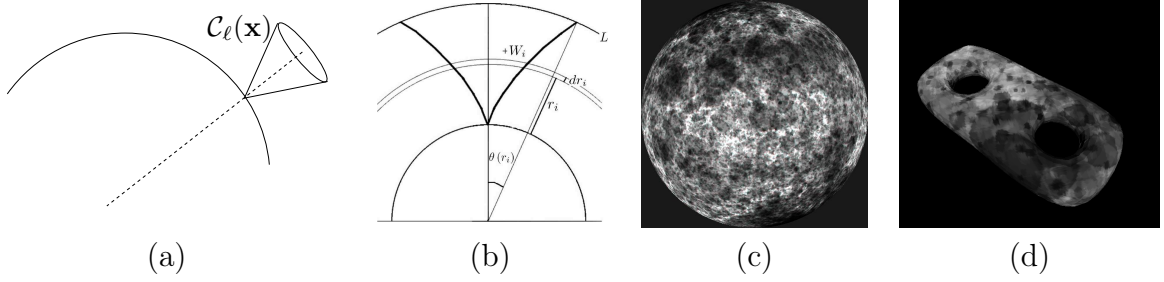


Fig. II.10: (a) Idée de base : transposer la construction sur la sphère ; (b) en pratique, il faut adapter la construction du cône et la définition de la mesure de contrôle en tenant compte de la courbure de la sphère ; (c) exemple de simulation d'une CPC sur la sphère ; (d) résultat d'une tentative de synthèse sur un double-beignet ("donut").

des moments $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$ et de mesure de contrôle $dm(t, r)$, la simulation consiste essentiellement à tirer les variables aléatoires $\alpha = M(\blacktriangledown)$, $\beta = M(\blacklozenge)$ et $\gamma = M(\blacktriangle)$ distribuées par $G_m(\blacktriangledown)$, $G_m(\blacklozenge)$ et $G_m(\blacktriangle)$ respectivement. La matrice $\Psi(t_k)$ devient $\Psi(t_{k+1})$ en faisant glisser les colonnes de $\Psi(t_k)$ vers la gauche en éliminant la diagonale et en renouvelant la dernière colonne. Nous utilisons ensuite la relation de récurrence :

$$Q_r(t_{k+1}) = Q_r(t_k) \cdot \exp \left(\sum_i C_{\lambda_i, i}(t_{k+1}) - \sum_i D_i(t_k) \right).$$

Contrairement au cas des CPC, cet algorithme ne s'adapte pas facilement en dimension $d \geq 2$.

1.7.3 Extension aux surfaces non planes

Vu sa simplicité, nous avons envisagé l'extension de la synthèse des cascades Poisson composées aux surfaces quelconques, à commencer par la sphère qui nous sert de terrain d'essai pour comprendre comment nous pourrions étendre la synthèse au cas d'une surface courbe quelconque. Les applications sont par exemple la synthèse de texture sur une surface quelconque sans découpage préalable pour l'infographie ainsi que la qualification d'un algorithme de stéréographie développé par S. Gissot et J.-F. Hochedez à l'Observatoire Royal de Belgique pour exploiter les données d'observation du Soleil issues de la mission STEREO. Nous n'évoquons ce sujet que brièvement ici puisqu'il sera développé plus en détail dans la thèse d'Émilie Kœnig.

La synthèse sur la sphère nécessite d'abord une adaptation de la notion d'invariance d'échelle puisque la notion de dilatation n'est pas univoque sur la sphère. La notion d'invariance d'échelle sera fonction de la dilatation choisie, dilatation angulaire ou dilatation stéréographique par exemple. A priori, ce choix ne semble pas crucial tant que l'on garantit que la dilatation coïncide avec la dilatation classique dans la limite des petites échelles. D'un point de vue formel, la dilatation stéréographique peut être un choix raisonnable puisqu'elle a été utilisée par Antoine *et al.* (2002) [13] pour construire des bases d'ondelettes

sur la sphère. Pour le physicien, cette dilatation n'est pas très intuitive cependant puisqu'elle nécessite un coefficient de dilatation infini pour recouvrir l'ensemble de la sphère à partir d'un petit élément de surface. La nature finie de la sphère s'en trouve masquée. La dilatation angulaire est plus intuitive physiquement. C'est celle que nous avons retenue pour l'instant. Notons que rien ne s'opposerait à utiliser la dilatation stéréographique par la suite.

Une fois la dilatation choisie, il s'agit essentiellement d'adapter les définitions des CPC dans le plan (voir p.35) au contexte sphérique. L'idée de départ est illustrée par la figure II.10(a) et consiste à tenter de transposer directement la construction des CPC impliquant un processus ponctuel de Poisson marqué "au-dessus" de la sphère. En pratique, il s'agira de tirer des coordonnées angulaires aléatoires (θ_i, φ_i) uniformément sur la sphère, ainsi que les altitudes (= échelles) associées r_i distribuées de façon adéquate, approximativement en $1/r^3$ si le rayon de la sphère est grand, voir (II.26) p.40. À chaque point $(\theta_i, \varphi_i, r_i)$ sera associé un multiplicateur W_i . La cascade $Q_\ell(\theta, \varphi)$ à la surface de la sphère sera toujours définie comme un produit de multiplicateurs appartenant à un cône bien choisi.

Pour rendre la définition plus précise il faut justement déterminer la forme exacte du cône contenant les multiplicateurs qui affectent un point (θ, φ) de la sphère d'une part et la densité du processus ponctuel (la mesure de contrôle) $dm(\theta, \varphi, r)$ d'autre part. La figure II.10(b) montre le cône associé à l'utilisation d'une dilatation angulaire. La forme de la densité du processus ponctuel est imposée par la propriété d'invariance d'échelle et dépend du rayon de la sphère. Dans la limite d'un rayon infini, on retrouve la densité en $1/r^3$ adaptée au plan. Dans les simulations, le choix d'un maillage ou un autre sera surtout lié à l'utilisation que l'on souhaite faire du résultat. Quoi qu'il en soit, on peut simuler la cascade en tout point de la sphère. La figure II.10(c) présente un exemple de réalisation. Nous obtenons ainsi un processus multifractal construit directement sur la sphère. Dans cet esprit, citons au passage le travail de J. Istas [109] qui propose une définition du mouvement brownien fractionnaire sur la sphère. D'autre part, la partie IV.3 abordera la question de l'analyse multifractale d'une mesure grâce à une transformée en ondelette sur la sphère.

La sphère présente l'avantage d'être une surface de courbure constante, ce qui rend la géométrie et les calculs relativement accessibles. Le travail d'adaptation des définitions des CPC à une surface quelconque semble bien plus délicat. Il semble très difficile de calculer analytiquement les cônes et mesure de contrôle en tout point d'une surface quelconque. Par conséquent, nous avons changé d'approche et tenté d'adopter une vision purement algorithmique des CPC pour explorer une adaptation à une surface quelconque ne nécessitant pratiquement aucun calcul analytique préalable. Il s'agit alors d'abandonner l'idée de travailler dans un espace continu pour travailler directement sur les sommets et les faces d'un maillage de la surface, et d'accepter un certain degré d'approximation dans la construction qui devient plus algorithmique que purement mathématique. Les résultats ne sont que préliminaires mais les premiers essais laissent penser que cette piste mérite d'être approfondie. La figure II.10(d) montre le résultat d'une première tentative de synthèse sur une surface de type beignet. Ce travail est en cours dans le cadre de la thèse d'Émilie König et d'une collaboration avec J.-M. Favreau (LIMOS) et M. Chevaldonné et Y. Gérard du Laboratoire d'Algorithmique et Image de Clermont-Ferrand (EA 2146).

2 Exponentielles d'intégrales stochastiques

Durant les années 2000, différents travaux [25, 56, 63, 64, 150, 188, 190] ont présenté et étudié des objets similaires ayant des propriétés d'invariance d'échelle multifractale dans une gamme continue d'échelle. Cette partie a pour but de montrer que, dans le cas des processus stables (gaussiens y-compris), tous ces objets sont cousins et liés aux cascades (infiniment divisibles) stables. Nous nous intéressons notamment à deux représentations : les cascades multiplicatives (utilisées précédemment) d'une part et les exponentielles d'intégrales stochastiques proposées dans [188] en dimension 1 d'autre part. Ce travail en collaboration avec F. Schmitt (DR CNRS, Station Marine de Wimereux, UMR 8187) a été publié dans [189].

Nous rappelons d'abord rapidement les diverses définitions proposées en dimension 1 dans la littérature dans le cas gaussien. Nous montrons que la définition à partir d'une intégrale stochastique proposée par Schmitt [188] dans le cadre gaussien s'étend au cadre stable d'abord en dimension 1 puis en dimension $d \geq 2$. Nous étudions les relations qu'entretiennent cette description et les construction multiplicatives. Enfin nous envisageons la définition causale de champs scalaires spatio-temporels multifractals respectant des propriétés d'homogénéité et de stationnarité.

2.1 Rappels

Nous avons vu que la définition d'une CID 1D implique la définition d'une mesure de contrôle $dm(t, r) = g(r)dt dr$ sur le demi-plan $\mathcal{P}^+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. L'invariance d'échelle impose la présence d'un terme en $1/r^2$ dominant dans la limite $r \rightarrow 0$. Les mesures de contrôle associées aux cas dits "(exactement) invariants d'échelle", voir (II.20) & (II.21), ont été décrites au §1.2 en utilisant le même cône symétrique $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$. Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, nous utiliserons ici la version causale de ce cône, voir figure II.11(b),

$$\mathcal{C}_\ell^{CRA}(t) = \{(t', r') : \ell \leq r' \leq 1, t - r' \leq t' \leq t\} \quad (\text{II.45})$$

pour décrire le cas dit "invariant d'échelle" avec $dm(t, r) = dt dr / r^2$. On peut décrire le cas "exactement invariant d'échelle" étudié par Bacry & Muzy [25, 150] en utilisant la même mesure de contrôle mais associée cette fois au cône défini par, voir figure II.11(a),

$$\mathcal{C}_\ell^{BM}(t) = \{(t', r') : \ell \leq r' \leq 1, t - r' \leq t' \leq t\} \cup \{(t', r') : t - 1 \leq t' \leq t, r' \geq 1\} \quad (\text{II.46})$$

Nous nous intéressons ici aux cascades stables. Dans ce cas, il apparaît que la mesure stochastique M peut s'exprimer en termes d'une intégrales stochastique relativement à un mouvement stable similaire à la construction proposée par Schmitt & Marsan [190] et étudiée dans le cas gaussien par Schmitt [188]. Avec les notations originales de Schmitt,

$$\epsilon_\lambda(t) = \lambda^{-\sigma^2/2} \exp \left(\sigma \int_{t+1-\lambda}^t (t+1-u)^{-1/2} dB(u) \right) \quad (\text{II.47})$$

où λ joue le rôle de l'inverse d'une résolution, tel $1/\ell$ pour les CID, et $dB(u)$ est un mouvement brownien standard ; σ^2 est un paramètre de variance. La quantité ϵ_λ est à comparer à $Q_{\ell=1/\lambda}$.

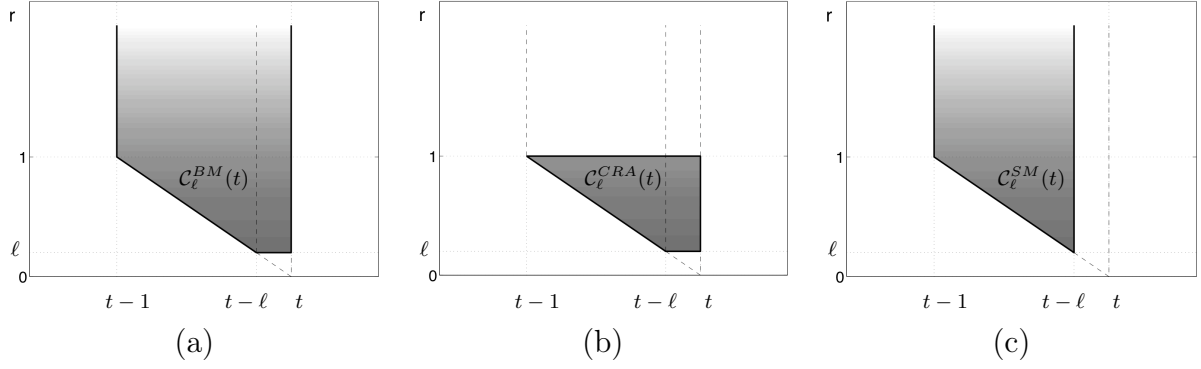


Fig. II.11: Cône $\mathcal{C}_\ell(t)$ choisi par (a) Bacry & Muzy [150], (b) Chainais, Riedi & Abry [64]; (c) Schmitt & Marsan dans [190] une fois l'équivalence établie (voir dans le texte).

Nous nous sommes appliqués à rassembler ces définitions au sein de notations cohérentes pour formuler précisément les liens entre les approches reposant respectivement sur les "cascades multiplicatives" telles (II.6) et sur les "intégrales stochastiques" telles (II.47). Nous travaillons ici avec les définitions causales.

2.2 En dimension 1

Dans un premier temps, la distribution G est la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2 associée à $\rho(q) = -\mu q - \sigma^2 \frac{q^2}{2}$ dans (II.7).

Nous montrons que l'on peut construire une mesure multifractale équivalente à la CID gaussienne Q_ℓ en remplaçant $M(\mathcal{C}_\ell(t))$ par l'intégrale stochastique :

$$M(\mathcal{C}_\ell(t)) \stackrel{d}{=} \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell(t)) + \sigma \int_{t-1}^{t-\ell} (t-t')^{-1/2} dB(t') + \sigma \int_{t-\ell}^t \ell^{-1/2} dB(t'). \quad (\text{II.48})$$

où $\stackrel{d}{=}$ est une égalité au sens des distributions et $m(\mathcal{C}_\ell)$ est donnée par $m(\mathcal{C}_\ell^{BM}(t)) = \log(1/\ell) + 1$. Une écriture équivalente est

$$M(\mathcal{C}_\ell(t)) \stackrel{d}{=} \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell(t)) + \sigma \int_{t-1}^t K_\ell(t-t') dB(t'), \quad (\text{II.49})$$

avec

$$K_\ell(\tau) = \begin{cases} \tau^{-1/2}, & \ell \leq \tau \leq 1, \\ \ell^{-1/2}, & 0 \leq \tau \leq \ell, \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

lorsque $\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}_\ell^{BM}$ comme dans (II.46). Ainsi, à chaque instant t , la variable aléatoire $Q_\ell(t)$ associée à une cascade infiniment divisible telle que (II.6) peut être décrite par une

intégrale stochastique par rapport à $dB(t')$:

$$\begin{aligned} Q_\ell(t) &\stackrel{d}{=} \frac{e^{\mu m(\mathcal{C}_\ell)}}{e^{(\mu+\sigma^2/2)m(\mathcal{C}_\ell)}} \exp \left[\sigma \int_{t-1}^t K_\ell(t-t') dB(t') \right] \\ &\stackrel{d}{=} e^{-\frac{\sigma^2}{2}m(\mathcal{C}_\ell)} \exp \left[\sigma \int_{t-1}^t K_\ell(t-t') dB(t') \right] \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

où $e^{-\frac{\sigma^2}{2}m(\mathcal{C}_\ell)}$ est un facteur de normalisation. De retour à la formulation (II.47) proposée par Schmitt & Marsan [190], posons $\ell = 1/\lambda$. Le changement de variable $t' = t - \frac{1}{t+1-u}$ dans (II.47) donne :

$$\epsilon_\lambda(t) = \ell^{\sigma^2/2} \exp \left(\sigma \int_{t-1}^{t-\ell} (t-t')^{-1/2} dB(t') \right), \quad (\text{II.52})$$

où l'on reconnaît l'exponentielle des premiers termes de (II.48) avec

$$\mathcal{C}_\ell^{SM}(t) = \{(t', r') : t-1 \leq t' \leq t-\ell, r' \geq t-t'\}. \quad (\text{II.53})$$

On a alors $m(\mathcal{C}_\ell^{SM}) = \log(1/\ell)$ et le facteur de normalisation $e^{-\sigma^2/2m(\mathcal{C}_\ell)}$ dans (II.51) devient $\ell^{\sigma^2/2}$ dans (II.52). Le cône \mathcal{C}_ℓ^{SM} est représenté sur la figure II.11(c). La différence entre ce cône et le cône \mathcal{C}_ℓ^{BM} de la figure II.11(a) est une mince bande $\{(t', r') : t-\ell \leq t' \leq t, r' \geq \ell\}$ qui devient infiniment fine et négligeable aux petites échelles lorsque $\ell \rightarrow 0$. Nous voyons ici précisément le lien entre la formulation (II.47) et (II.6).

Enfin, le cône que nous avons utilisé dans [64] –voir figure II.11(b)– donne

$$M(\mathcal{C}_\ell^{CRA}(t)) \stackrel{d}{=} \mu \cdot \log(1/\ell) + \sigma \int_{t-1}^{t-\ell} \left(\frac{1}{t-t'} - 1 \right)^{1/2} dB(t') + \sigma \int_{t-\ell}^t \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right)^{1/2} dB(t'). \quad (\text{II.54})$$

Une fois encore, la différence entre (II.48) et (II.54) est surtout sensible aux échelles $r \simeq 1$, et disparaît aux petites échelles lorsque $\ell \rightarrow 0$.

Remarquons que les égalités en loi (II.48) à (II.51) ne sont valides que pour un instant t seulement. En effet, (II.51) ne pourrait pas être écrite en utilisant le même mouvement brownien $dB(t)$ pour deux instants distincts $t_1 \neq t_2$. Ainsi, $\epsilon_\lambda(t)$ défini par (II.52) et $Q_\ell(t)$ défini par (II.51) ne sont pas des processus identiques a priori. Ce qui a été perdu de $Q_\ell(t)$ à $\epsilon_\lambda(t)$ est l'indépendance en échelle de la mesure M . Cependant, on retrouve dans les deux cas la propriété caractéristique des cascades multiplicative $\text{cov}(\log \epsilon_\lambda(0), \log \epsilon_\lambda(\tau)) \sim \sigma^2 \log(1/\tau)$. Cette remarque reste valable pour toutes les généralisations considérées dans la suite.

Les résultats précédents se généralisent sans peine au cas stable, c'est-à-dire pour $G = S(\alpha, \sigma, \mu, \beta)$ [179], dès lors que la loi G est asymétrique avec $\beta = -1$. Cette dernière condition est imposée par la nécessité de l'existence des moments de l'exponentielle d'un processus stochastique stable (voir Schertzer & Lovejoy [182, 184] et Kida [119]). La fonction $\rho(q)$ dans (II.7) prend alors la forme $\rho(q) = -\mu q - \sigma^\alpha q^\alpha$ avec $0 < \alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$). Nous obtenons dans ce cas :

$$M(\mathcal{C}_\ell(t)) \stackrel{d}{=} \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell(t)) + \sigma \int_{t-1}^t K_\ell(t-t') dL_\alpha(t'), \quad (\text{II.55})$$

où le noyau est donné par :

$$K_\ell(\tau) = \begin{cases} \tau^{-1/\alpha}, & \ell \leq \tau \leq 1, \\ \ell^{-1/\alpha}, & 0 \leq \tau \leq \ell. \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

Le choix $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien.

2.3 En dimension $d \geq 2$

Les définitions précédentes se généralisent naturellement en dimension $d > 1$ en utilisant :

$$dm(\mathbf{X}, r) = C(d) \frac{dr}{r^{d+1}} d\mathbf{X} \quad (\text{II.57})$$

où $C(d)$ est une constante liée à la surface \mathcal{S}_d de l'hypersphère de dimension d , et la notation \mathbf{X} est utilisée car elle pourra se décomposer plus tard en une partie spatiale et un temps sous la forme $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t)$. Le cône $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X})$ est défini en dimension $d + 1$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\ell(\mathbf{X}) = & \{(\mathbf{X}', r') : \ell \leq \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq 1, r' \geq \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|\} \\ & \cup \{(\mathbf{X}', r') : \|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq \ell, r' \geq \ell\}. \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

La description d'une mesure aléatoire α -stable par une intégrale stochastique (II.55) devient en dimension d en utilisant un noyau isotrope en coordonnées polaires :

$$M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X})) \stackrel{d}{=} \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell) + \sigma \iint_{\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq 1} K_\ell^{(d)}(\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|) dL_\alpha(\mathbf{X}'), \quad (\text{II.59})$$

avec, pour $0 < \alpha \leq 2$,

$$K_\ell^{(d)}(a) = \begin{cases} \mathcal{S}_d^{-1/\alpha} \rho^{-d/\alpha}, & \text{for } \ell \leq \rho \leq 1, \\ \mathcal{S}_d^{-1/\alpha} \ell^{-d/\alpha}, & \text{for } 0 \leq \rho \leq \ell. \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

Cette description se rapproche de l'approche heuristique décrite dans [182, 184]. Ces auteurs avaient aussi proposé d'intégrer un noyau en loi de puissance contre un mouvement stable sur un volume donné.

Une conséquence intéressante de ce travail concerne la simulation des cascades α -stables. Elles sont a priori difficiles à simuler en dimension d car elles n'appartiennent pas à la famille des cascades Poisson composées. Nous accédons ici grâce à (II.59) en particulier à une méthode de simulation de mesures multifractales α -stables beaucoup plus simple que pour les CID. Il suffit de simuler un mouvement α -stable $dL_\alpha(\mathbf{X})$, ce qui revient à simuler un ensemble de variables aléatoires α -stables i.i.d. pour un échantillonnage régulier de l'espace des \mathbf{X} . L'égalité (II.59) donne accès à $M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X}))$ dont il reste à prendre l'exponentielle. Le processus obtenu n'est pas identique à celui défini par (II.6) mais il présente des propriétés de multiscaling similaires (même spectre multifractal notamment).

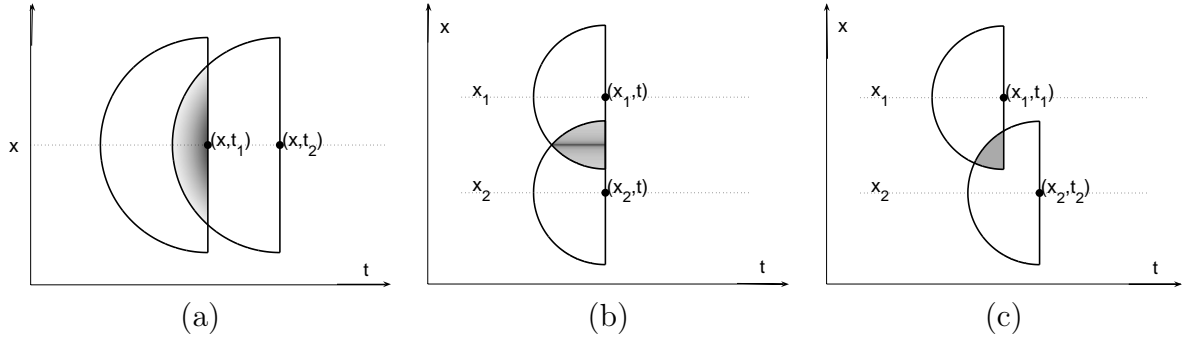


Fig. II.12: Illustration (cas $d = 2$) de l'origine des corrélations (a) temporelles, (b) spatiales, dans le processus $Q_\ell(x, t)$. Les corrélations peuvent être décrites comme la mesure de l'intersection de demi-hypersphères dans le domaine (\mathbf{x}, t) .

2.4 Définition spatio-temporelle causale

Nous avons proposé dans [56] d'utiliser l'une des dimensions de \mathbf{X} comme une dimension temporelle de façon à envisager la simulation d'animations multifractales, chaque image étant multifractale en espace, l'évolution temporelle de chaque pixel étant elle aussi multifractale. Dans la description reposant sur l'exponentielle d'une intégrale stochastique, il suffit de considérer que $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t)$. On utilise alors $d - 1$ dimensions d'espace et 1 dimension pour le temps. Pour garantir la causalité de la construction, il suffira de remplacer le cône symétrique utilisé précédemment par le demi-cône ne conservant que la partie telle que $t' \leq t$ en adaptant les constantes de normalisation si nécessaire. Le processus est alors défini comme l'exponentielle du second membre ci-dessous :

$$M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{X})) \stackrel{d}{=} \mu \cdot m(\mathcal{C}_\ell) + \sigma \iint_{\mathcal{F}} K_\ell^{(d)}(\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\|) dL_\alpha(\mathbf{X}'), \quad (\text{II.61})$$

avec $\mathcal{F} = \{\mathbf{X}' = (\mathbf{x}', t') : \|\mathbf{x}', t'\| - (\mathbf{x}, t)\| \leq 1; t' \leq t\}$. Le noyau $K_\ell^{(d)}$ est toujours donné par (II.60).

L'origine des corrélations dans $Q_\ell(\mathbf{x}, t)$ s'explique simplement en termes géométriques. Elles correspondent à la mesure de l'intersection de demi-hypersphères dans le domaine (\mathbf{x}, t) . La figure II.12(a) illustre l'information partagée par des valeurs successives $Q_\ell(\mathbf{x}, t_1)$ et $Q_\ell(\mathbf{x}, t_2)$ en un point \mathbf{x} donné lorsqu'on travaille en dimension d'espace $d - 1 = 1$. La figure II.12(b) illustre les corrélations spatiales entre $Q_\ell(x_1, t)$ et $Q_\ell(x_2, t)$ à l'instant t . La figure II.12(c) illustre la corrélation existant généralement entre deux points $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ considérés à deux instants $t_1 \neq t_2$.

Cette construction nous semble plus cohérente que celle proposée par Barndorff-Nielsen et ses collaborateurs [29, 185, 186]. En effet, dans ces travaux, les corrélations temporelles aux temps longs sont contrôlées par les mêmes quantités que les corrélations spatiales à courte distance. C'est une conséquence de leur construction. Il n'y a pas de paradoxe de ce genre dans notre approche.

La construction proposée plus haut assure de façon explicite :

- la stationnarité du processus pour une position \mathbf{x}_o fixée ;
- une évolution temporelle causale ;
- une description en termes d'intégrale stochastique par rapport à un mouvement stable dL_α ;
- une correspondance entre cette description où les variables d'espace et de temps jouent des rôles explicitement distincts et une description globale $\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}, t))$ où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$ sont combinées.

Cette construction est à rapprocher des champs fractionnairement intégrés décrits dans [182] et étendus plus tard pour la définition de processus multifractals en dimension $(d+1)$ spatio-temporelle dans [143]. Dans cette dernière approche, l'invariance d'échelle était imposée dans l'espace de Fourier grâce à la propriété $\text{cov}(\log \epsilon_\lambda(0), \log \epsilon_\lambda(\mathbf{x})) \sim \sigma^2 \log(1/\|\mathbf{x}\|)$ en utilisant un filtre en k^{-1} dans le domaine de Fourier. Les processus ainsi obtenus sont causaux mais ne peuvent être simulés de façon causale à cause de l'utilisation de la transformée de Fourier.

Enfin, remarquons que la définition (II.61) peut être formulée dans le cadre de "*l'invariance d'échelle généralisée*" (*Generalized Scale Invariance*) [161, 180] introduite par Schertzer et ses collaborateurs. Ce cadre général permet d'introduire une anisotropie contrôlée dans les propriétés d'invariance d'échelle en remplaçant la propriété d'invariance classique en dimension $d + 1$ par l'auto-similarité matricielle décrite au paragraphe §I.1.4. On peut par exemple utiliser la norme anisotrope (voir éq. (44) de [143])

$$\|(\mathbf{x}, t)\|_\Lambda = (|\mathbf{x}|^{d_{el}-d/\alpha} + |t|^{\frac{d_{el}-d/\alpha}{1-\Lambda}})^{\frac{1}{d_{el}-d/\alpha}} \quad (\text{II.62})$$

où Λ caractérise l'anisotropie ($\Lambda = 0$ dans le cas isotrope) et $d_{el} = d + 1 - \Lambda$. Cette approche permet de prendre en compte une évolution éventuelle de l'anisotropie du champ considéré depuis les grandes jusqu'aux petites échelles. Encore une fois, on pense au contexte de la turbulence où l'on considère que la cascade "efface" les détails de l'écoulement à grande échelle de sorte que les petites échelles sont localement isotropes. Les écoulements atmosphériques sont plutôt bidimensionnels lorsqu'on les regarde à l'échelle de la Terre, tandis qu'ils sont plutôt tridimensionnels à l'échelle de l'homme.

3 Conclusion & Perspectives

Un cap a été franchi grâce à un ensemble de travaux sur ce sujet depuis le début des années 2000. Jusque-là, nous disposions d'un ensemble limité de constructions, produisant presque systématiquement une invariance d'échelle discrète. En turbulence, un flot de travaux s'est appliqué à analyser les données expérimentales et numériques en développant tout un cadre théorico-phénoménologique très riche pour interpréter les observations. Beaucoup d'idées fondamentales sont nées lors de cette phase. Elles ont été une source d'inspiration essentielle des constructions telles que les cascades infiniment divisibles présentées ici.

L'obtention de la construction de mesures à invariance d'échelle continue est un pas indispensable non seulement pour disposer de modèles physiquement réalistes, mais aussi

pour envisager les généralisations en dimension supérieure à 1. En dimension supérieure à 1, un ingrédient supplémentaire intervient, la géométrie. Le caractère discret d'une construction se traduit en général par des artefacts très visibles du fait de leurs conséquences géométriques.

Ce thème est actif aujourd'hui encore. Quelques résultats très récents ont permis de nouvelles avancées. Rhodes & Vargas (2009) [167] explorent une nouvelle généralisation des CID en dimension d . Au lieu d'utiliser un cône en dimension $d+1$ comme nous l'avons fait, ils proposent de conserver le cône des CID en dimension 1 sur chacun des axes de coordonnée en faisant intervenir un processus aléatoire sur l'espace des isométries de \mathbb{R}^d . Cette nouvelle approche semble permettre d'obtenir une invariance d'échelle exacte en dimension d , alors que la construction utilisant les cônes n'en est pas capable. Une autre avancée récente est due au travail de Barral & Mandelbrot (2009) [34] qui explore la construction de cascades multiplicatives signées. En autorisant les multiplicateurs W_i à prendre des valeurs négatives, la construction des cascades binomiales (correctement normalisée) converge vers des fonctions dont les propriétés fractales sont comparables à celles du mouvement brownien fractionnaire. Barral, Jin & Mandelbrot (2009) [32] ont aussi étudié le cas où les multiplicateurs, voire la mesure aléatoire utilisée dans la construction des CID, prend des valeurs complexes. Il faut préciser que ces dernières définitions aboutissent non plus à des mesures, mais à des fonctions aléatoires.

Parmi les généralisations à explorer, l'accès à des mesures obéissant à des lois d'échelles infiniment divisibles serait un vrai progrès et assouplirait les capacités d'adaptation de ces modèles. Il s'agirait par exemple de construire des mesures telles que $\mu(\mathcal{B}_r) \sim \exp[-(q + \varphi(q))n(r)]$ où \mathcal{B}_r est une boule de rayon r . Le comportement garanti par (II.41) dans le théorème II.1 est moins souple : il se décompose en un terme en r^q et un terme en $\exp(-\varphi(q)n(r))$. Le terme en loi de puissance est en quelque sorte lié au lien entre la mesure et la CID Q_ℓ . La construction actuelle repose sur une simple intégration qu'il faudrait sans doute savoir remplacer par une autre fonctionnelle faisant intervenir la mesure de contrôle par exemple.

Une autre direction de travail concerne l'introduction de formes élaborées d'anisotropie telles que celles évoquées au §I.1.4 dans les CID. Nous avons envisagé une possibilité dans le dernier paragraphe impliquant les intégrales stochastiques. D'autres pistes restent à explorer en collaboration avec Hermine Biermé et Anne Estrade (Paris V).

Du côté des applications et sous un angle orienté vers l'infographie, l'obtention d'algorithmes de synthèse progressive rapides serait un plus. Les CID fournissent un outil naturel de synthèse de texture procédurale. Pour être performant du point de vue des applications en infographie, la synthèse doit être très rapide, mais surtout progressive, au sens où les détails de la texture doivent pouvoir apparaître au fur et à mesure des besoins de l'affichage (lorsqu'un personnage se déplace dans un environnement par exemple). Un autre intérêt des CID pourrait être la possibilité de les synthétiser directement sur une surface quelconque avec un contrôle du rendu proche de celui que l'on a dans le plan. Ces applications potentielles font l'objet de discussions avec la société Allégothmic. Divers obstacles techniques restent à franchir.

III. Construction de marches aléatoires à lois d'échelle

Le chapitre précédent était consacré à la définition de mesures ayant des propriétés de multiscaling, notamment multifractales. Nous avons ainsi construit des processus aléatoires positifs, que l'on peut voir comme des densités, associés à des mesures. Dans un grand nombre d'applications des multifractals, ce sont plutôt des modèles de type marche aléatoire qui sont nécessaires. Au-delà des mouvements browniens fractionnaires (fBm) ou des mouvements linéairement stables fractionnaires (LFSM) [179] qui sont simplement auto-similaires donc monofractals, plusieurs processus multifractals ont été proposés dans la littérature pour introduire des propriétés multifractales dans les modèles en dimension 1. Il en va de même en dimension 2 où il a d'abord fallu explorer les définitions possibles de processus auto-similaires tels que le mouvement brownien fractionnaire d -dimensionnel [22, 42] et les champs auto-similaires stables [44, 45, 68], avec un potentiel ingrédient supplémentaire, l'anisotropie. Les systèmes de fonctions itérées [30] sont aussi une approche possible. Les cascades sur les coefficients d'ondelettes ont été proposées en dimensions 1 pour les signaux [18] et en dimension 2 pour les images [73, 209]. Ces modèles sont particulièrement pratiques à manipuler car associés à une base de fonctions. Cependant, ils ne permettent de reproduire qu'une invariance d'échelle discrète privilégiant les rapports d'échelle en puissance de 2.

Une méthode simple pour construire des processus multifractals, voir par exemple Mandelbrot (1999) [141], consiste à utiliser une mesure multifractale $A(t) = \mu([0, t]) = \int_0^t Q(u)du$ comme temps multifractal d'un processus auto-similaire à accroissements stationnaires indépendant de A :

$$Z(t) = Y(A(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.1})$$

Un choix classique pour Y est le mouvement brownien fractionnaire. On parle alors du mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal auquel est consacré la première partie de ce chapitre dans le cas où le temps multifractal est issu d'une cascade infiniment divisible.

Une autre possibilité est celle initialement explorée par Bacry et ses collaborateurs (2001) [23], une construction appelée *Multifractal Random Walk (MRW)* ou *marche aléatoire multifractale* qui repose sur une intégrale stochastique :

$$Z(t) = \int_0^t Q(u)dY(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.2})$$

où Q est un bruit multifractal positif stationnaire “convenable” et Y est indépendant de Q . Ces processus sont relativement simples à étudier lorsque Y est le mouvement brownien standard car dans ce cas Z est gaussien conditionnellement à Q [25]. La définition et l'analyse de ce processus lorsque Y est un mouvement brownien fractionnaire sont plus délicates et font l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

Le premier intérêt des MRW (III.2) vient de leurs propriétés multifractales qui sont en général différentes de celles de (III.1). Les MRW élargissent la famille des modèles multifractals disponibles. Un autre intérêt est lié à leur définition elle-même qui mène à d'autres méthodes de simulation. L'allure des signaux obtenus est différente. Le bruit $Q(u)$ n'a d'ailleurs pas le même rôle pour les MRW et pour les fBm à temps multifractal. Dans une MRW (III.2), la variabilité du signal fluctue avec l'apparition de pics dans $Q(u)$ tandis que l'activité d'un système aléatoire modélisé par (III.1) est plus rapide lorsque $Q(u)$ prend des valeurs élevées.

Nous nous concentrons ici sur la définition de processus ayant des propriétés de multiscaling continues en dimension 1. Les travaux présentés dans ce chapitre sont essentiellement le résultat de deux collaborations. La première, avec Rudolf Riedi (Rice Univ., Houston, USA) et Patrice Abry (ENS Lyon) [63,64], a porté sur la définition des cascades infiniment divisibles et une première tentative d'obtention d'écart aux lois de puissance dans les lois d'échelle, y-compris dans le comportement du fBm à temps multifractal. Cet aspect a déjà été partiellement traité dans la partie II.1. La seconde collaboration, avec Laure Coutin (PR Paris V), Vlasos Pipiras (Univ. North Carolina, USA) et Patrice Abry [2], a porté sur la définition et l'étude des marches aléatoires multifractales issues de l'intégration d'un mouvement brownien fractionnaire. Ce travail est publié dans IEEE Trans. on Information Theory [2].

1 Mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal issu d'une CID

1.1 Définition

Afin d'assurer l'homogénéité des notations dans les différentes parties de ce chapitre, nous introduisons le paramètre

$$\kappa = H - 1/2, \quad (\text{III.3})$$

et nous noterons selon le contexte B^κ ou B_H le fBm de paramètre $H = 1/2 + \kappa \in]0, 1[$.

Définition III.1: Soit $A(t) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \int_0^t Q_\ell(u) du$ où Q_ℓ est une cascade infiniment divisible, voir (II.37). Le fBm en temps multifractal associé est défini pour $t \geq 0$ par

$$V_H(t) = B_H(A(t)) \quad (\text{III.4})$$

où B_H est indépendant de $A(t)$. Nous utiliserons aussi la notation $V^\kappa(t) = B^\kappa(A(t))$.

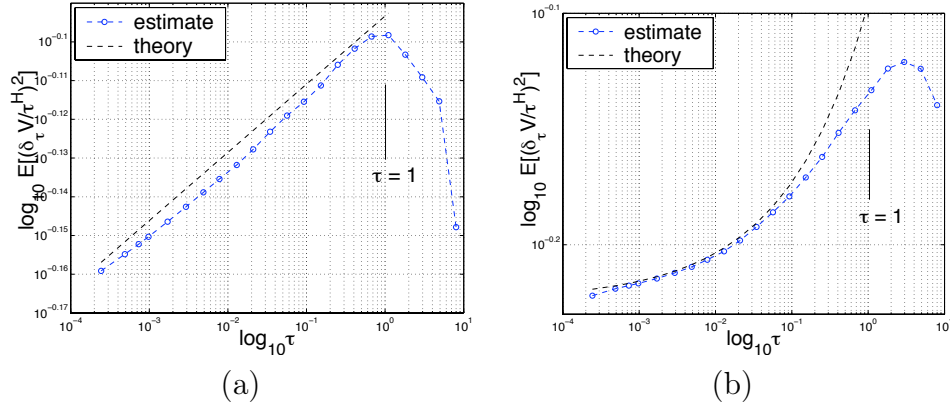


Fig. III.1: Lois d'échelle de mouvements browniens à temps multifractal issu d'une cascade infiniment divisible : (a) cas invariant d'échelle $\log \mathbb{E}[(\delta_\tau V / \tau^H)^2] \sim c\varphi(2H) \log \tau + Cte$; (b) cas non invariant d'échelle : écart aux lois de puissance, $\log \mathbb{E}[(\delta_\tau V / \tau^H)^2] \sim -\varphi(2H)m(\mathcal{C}_\tau) + Cte$.

En pratique, pour les simulations, nous ne travaillerons pas avec l'objet limite ($\ell \rightarrow 0$) et nous définissons :

$$V_{H,\ell}(t) = B_H(A(t)) \iff V_\ell^\kappa(t) = B^\kappa(A_\ell(t)). \quad (\text{III.5})$$

1.2 Propriétés

La cascade infiniment divisible Q_ℓ est stationnaire de sorte que le temps multifractal $A(t)$ est à accroissements stationnaires. Le fBm est aussi à accroissements stationnaires¹ de sorte que V_H est à accroissements stationnaires. L'auto-similarité de B_H et l'indépendance entre B_H et A impliquent que

$$\mathbb{E}[|V_H(t)|^q] = \mathbb{E}\mathbb{E}[|B_H(A(t))|^q | A] \quad (\text{III.6})$$

$$= \mathbb{E}[|B(1)|^q] \cdot \mathbb{E}[|A(t)|^{qH}], \quad (\text{III.7})$$

pour tous les ordres $q \in]-1, \infty[$ tels que $\mathbb{E}|A(t)|^{qH}$ est bien défini. Nous obtenons ainsi comme conséquence immédiate de (II.40) :

Théorème III.1: (théorème 2 p.1071 de [64])

Sous les hypothèses du Théorème II.1 p. 44, il existe des constantes \overline{C}_q et \underline{C}_q telles que pour tout $t < 1$,

$$\underline{C}_q t^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_t)] \leq \mathbb{E}[|V_H(t)|^q] \leq \overline{C}_q t^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_t)]. \quad (\text{III.8})$$

Comme V_H est à accroissements stationnaires, les accroissements $\delta_\tau V_H$ de V_H vérifient² pour $\tau < 1$:

$$\mathbb{E}[\delta_\tau V_H^q] \sim C_q \tau^{qH} \exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]. \quad (\text{III.9})$$

¹ Le fBm est le seul processus gaussien auto-similaire à accroissements stationnaires [86].

² Ici encore, ' \sim ' est une notation raccourcie pour une inégalité telle que (II.40) et (III.8).

Rappelons que \mathcal{C}_t (respectivement \mathcal{C}_τ) est le cône de la définition des CID p.35 pour $\ell = t$ (respectivement $\ell = \tau$). Pour $\tau > 1$, on a seulement $\mathbb{E}[\delta_\tau V_H^q] \sim C_q \tau^{qH}$. Les fBm à temps multifractal issu d'une CID sont des processus à accroissements stationnaires qui vérifient un comportement de multiscaling continu en échelle et éventuellement différent d'une loi de puissance pure, voir figure III.1. Dans le cas invariant d'échelle, voir II.1.4, (III.8) devient, pour $\tau < 1$,

$$\underline{C}_q \tau^{qH+c\varphi(qH)} \leq \mathbb{E}|\delta_\tau V_H|^q \leq \overline{C}_q \tau^{qH+c\varphi(qH)}. \quad (\text{III.10})$$

On obtient même un résultat plus fort dans le cas de l'invariance d'échelle exacte (II.19) :

$$\mathbb{E}|V_H(t)|^q = C_q \tau^{qH+c\varphi(qH)}. \quad (\text{III.11})$$

Nous avons montré que l'on pouvait imposer un écart contrôlé à l'invariance d'échelle en loi de puissance en choisissant la mesure de contrôle $dm(t, r)$ pour que $m(\mathcal{C}_\tau) \neq -c \ln \tau$. Le terme $\exp[-\varphi(qH)m(\mathcal{C}_\tau)]$ dans (III.9) n'est alors plus un terme en loi de puissance. Cet écart se traduit par la courbure visible sur la figure III.1(b). C'est le choix de la mesure de contrôle à travers la forme de $m(\mathcal{C}_\tau)$ qui impose la forme de cet écart à un comportement en loi de puissance.

Comme nous l'avions déjà remarqué dans le chapitre précédent à propos des mesures issues de CID, le comportement (III.9) n'est a priori pas le plus général. Nous aimerions trouver un moyen de construire des marches aléatoires à lois d'échelles infiniment divisibles, par exemple en $\exp[-(qH + \varphi(q))n(\tau)]$. Le passage par un fBm à temps multifractal ne paraît pas être la meilleure solution.

1.3 Simulation numérique

La simulation numérique d'un mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal pose quelques problèmes. Elle nécessite la simulation d'une cascade infiniment divisible très bien résolue pour permettre un rééchantillonnage le moins approximatif possible du fBm. Pour un pas de temps Δt , nous avons utilisé la méthode suivante :

1. on simule un fBm B_H en utilisant la méthode de la matrice circulante. Ce fBm est suréchantillonné d'un facteur p (par exemple $p = 16$) par rapport au temps multifractal A_ℓ . En pratique, B_H est simulé aux instants t'_k associés au pas d'échantillonnage $\Delta t' = \Delta t/p$,
2. on pose $V_H(t_k) = B_H(t'_k)$ pour t'_k tel que

$$|t'_k - A_\ell(t_k)| = \inf_{t'_j} |t'_j - A_\ell(t_k)|.$$

La simulation n'est qu'approximative mais donne de bons résultats en terme de cohérence entre les propriétés attendues et les propriétés observées.

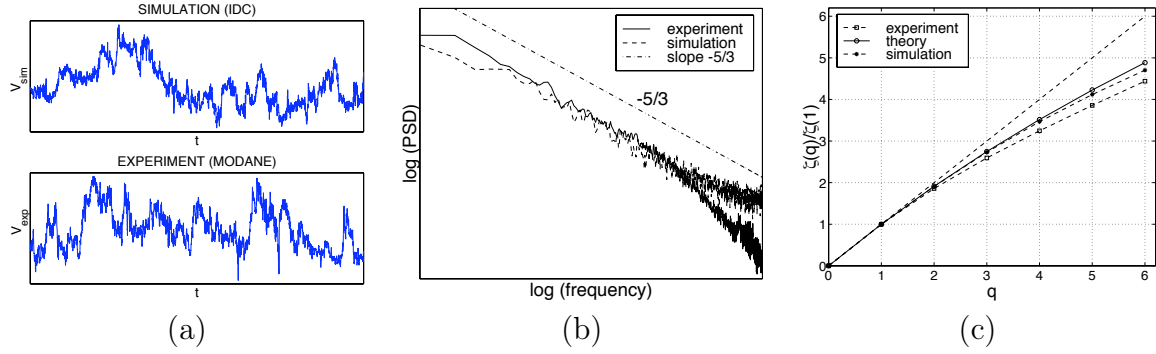


Fig. III.2: Comparaison entre un fBm à temps multifractal issu d'une cascade de Poisson correspondant au modèle de She-Lévêque et un signal expérimental (Modane, $Re \sim 2500$ [137]) : (a) trajectoires de signaux mesuré et simulé, (b) densités spectrales de puissance, (c) exposants multifractals associés.

1.4 Modélisation d'un champ de vitesse turbulent

La motivation de départ de notre intérêt pour le mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal est la modélisation de la mesure d'une composante d'un champ de vitesse turbulent par un processus aléatoire. L'un des modèles multifractals théoriques de référence en turbulence est celui de She & Lévêque (1994). Il s'avère que ce modèle correspond exactement à la modélisation du champ de dissipation turbulent par une mesure issue d'une cascade infiniment divisible, et du champ de vitesse associé par un mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal issu de cette même cascade. Dans ce cas précis, la cascade infiniment divisible est une cascade de Poisson, c'est-à-dire qu'elle correspond au cas où tous les multiplicateurs W_i de la définition (II.8) p.36 des cascades de Poisson composées sont égaux à $2/3$; la valeur $2/3$ est ici imposée par des considérations physiques dans l'approche de She & Lévêque. L'alea n'intervient alors plus dans la construction qu'à travers le processus ponctuel (t_i, r_i) . Par conséquent, nous avons proposé [63] de comparer le résultat d'une mesure expérimentale dans un écoulement turbulent au comportement d'un fBm à temps multifractal issu d'une cascade de Poisson avec $H = 1/3$ pour le fBm et $W_i = 2/3$ pour la cascade. La figure III.2(a) compare une trajectoire issue des données expérimentales fournies par Y. Gagne [137] avec une trajectoire du modèle simulé. L'allure graphique est effectivement similaire. La figure III.2(b) montre que les spectres des deux signaux sont bien en $k^{-5/3}$ comme attendu pour un écoulement turbulent. La figure III.2(c) montre d'une part que les exposants multifractals estimés sur le signal simulé correspondent bien aux exposants théoriques attendus, et d'autre part que les données expérimentales et les signaux simulés ont bien des comportements similaires, dans la limite de l'adéquation du modèle de She & Lévêque aux données.

2 Marches aléatoires multifractales

2.1 Définitions

Dans un article de 2001, Bacry, Delour & Muzy [23] ont proposé la construction d'un processus à temps discret noté $X_{\Delta t}(t)$ et appelé alors *Multifractal Random Walk (MRW)* défini par

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \delta_{\Delta t} X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{t/\Delta t} \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k]} \quad (\text{III.12})$$

avec $X_{\Delta t}(0) = 0$ et $t = k\Delta t$; par ailleurs $\delta_{\Delta t} X_{\Delta t}(t) = X_{\Delta t}(t + \Delta t) - X_{\Delta t}(t)$ et $\epsilon_{\Delta t}$ est un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 \Delta t$; $\epsilon_{\Delta t}$ et $\omega_{\Delta t}$ sont décorréliées. De plus, $\omega_{\Delta t}$ est un processus gaussien de covariance

$$\text{cov}(\omega_{\Delta t}[k_1] \omega_{\Delta t}[k_2]) = \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t}[|k_1 - k_2|], \quad (\text{III.13})$$

où

$$\rho_{\Delta t}[k] = \begin{cases} \frac{L}{(|k|+1)\Delta t} & \text{pour } |k| \leq L/\Delta t - 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Cette dernière contrainte est à rapprocher de (II.29). L'objet naturel défini à temps continu et correspondant à cette construction discrète est précisément du type de (III.2) où Y est un mouvement brownien standard et $Q(u)$ une cascade log-normale.

Le point de départ du travail présenté ici est la question de l'existence de l'objet à temps continu (soit la limite $\Delta t \rightarrow 0$), voire de la version plus générale où Y est un mouvement brownien fractionnaire et l'intégrande $Q(u)$ une cascade infiniment divisible (CID), voir (III.20). Nous aboutissons ainsi aux conditions d'existence et aux propriétés des marches aléatoires définies comme des intégrales de Wiener fractionnaires.

2.1.1 Intégrale de Wiener fractionnaire d'une CID

Afin de donner une idée de l'univers mathématique dans lequel il faut se plonger pour répondre au problème posé, nous donnons une très brève présentation de l'intégrale de Wiener fractionnaire $\int_0^t f(u) dB^\kappa(u)$ qui est utilisée par la suite, où B^κ , $\kappa \in]-1/2, 1/2[$, est le fBm de paramètre $H = 1/2 + \kappa$, f est une fonction déterministe et $t \in \mathbb{R}$ est fixé. Pour une présentation mathématique détaillée, nous renvoyons le lecteur à l'article de revue de Pipiras & Taqqu [163]. Le cas où $\kappa = 0$ correspond à l'intégrale stochastique habituelle qui est bien définie pour $f \in L^2[0, t]$. Pour $\kappa \in (0, 1/2)$, plusieurs classes d'intégrandes f sont possibles pour l'intégration de Wiener fractionnaire. L'une d'elle est définie par

$$\mathcal{L}^\kappa = \left\{ f : \int_0^t \int_0^t |f(u)| |f(v)| |u - v|^{2\kappa-1} du dv < \infty \right\}. \quad (\text{III.15})$$

Pour $\kappa \in (-1/2, 0)$, la classe utilisée habituellement est définie par

$$\mathcal{L}^\kappa = \left\{ f : \exists \phi_f \in L^2[0, t] : f(u) = u^{-\kappa} (I_{t-}^{-\kappa} s^\kappa \phi_f(s))(u) \right\}. \quad (\text{III.16})$$

On peut définir sur \mathcal{L}^κ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^\kappa} = C_\kappa \int_0^t \int_0^t f(u)g(v)|u-v|^{2\kappa-1}dudv, \quad (\text{III.17})$$

où $C_\kappa > 0$ est une constante. Pour $f \in \mathcal{L}^\kappa$, l'intégrale de Wiener fractionnaire notée

$$\mathcal{I}^\kappa(f) = \int_0^t f(u)dB^\kappa(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.18})$$

est définie comme la limite $L^2(\Omega)$ des intégrales $\mathcal{I}^\kappa(f_n)$ de la suite de fonctions constantes par morceaux f_n telles que $\langle f - f_n, f - f_n \rangle_{\mathcal{L}^\kappa} \rightarrow 0$. L'intégrale de Wiener fractionnaire d'une fonction constante par morceaux $g(u) = \sum_{k=1}^n g_k 1_{[a_k, b_k)}(u)$ est définie comme $\mathcal{I}^\kappa(g) = \sum_{k=1}^n g_k (B^\kappa(b_k) - B^\kappa(a_k))$. Par définition, $\mathcal{I}^\kappa(f)$, $f \in \mathcal{L}^\kappa$, sont des variables aléatoires gaussiennes de covariance

$$E\mathcal{I}^\kappa(f)\mathcal{I}^\kappa(g) = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^\kappa}. \quad (\text{III.19})$$

Nous allons considérer les marches aléatoires multifractales (MRW) définies comme limite d'une intégrale de Wiener fractionnaire :

$$Z_\ell^\kappa(t) = \int_0^t Q_\ell(u)dB^\kappa(u), \quad (\text{III.20})$$

quand $\ell \rightarrow 0$, où $Q_\ell(u)$ est une CID (exactement) invariante d'échelle, voir chap. II, et B^κ est un fBm. On peut montrer que :

Proposition III.1: *Pour $\kappa \in (-1/2, 1/2)$, $Q_\ell \in \mathcal{L}^\kappa$ presque-sûrement pour tout $\ell > 0$ fixé de sorte que l'intégrale de Wiener fractionnaire (III.20) est bien définie presque-sûrement pour tout $\ell > 0$.*

2.1.2 Notations

Nous ne considérons ici que les cas invariants d'échelle (II.18) ou (II.19). Nous aurons besoin des notations suivantes. Soit

$$\kappa_c = -c\varphi(2)/2 > 0. \quad (\text{III.21})$$

Il faudra distinguer les cas suivants :

$$(A) : c\varphi(2) + 2\kappa > 0 \Leftrightarrow \kappa_c < \kappa < 1/2, \quad (\text{III.22})$$

$$(E) : c\varphi(2) + 2\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = \kappa_c, \quad (\text{III.23})$$

$$(B) : c\varphi(2) + 2\kappa < 0, \kappa \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \kappa < \kappa_c, \quad (\text{III.24})$$

$$(N) : c\varphi(2) + 2\kappa < 0, \kappa < 0 \Leftrightarrow -1/2 < \kappa < 0, \quad (\text{III.25})$$

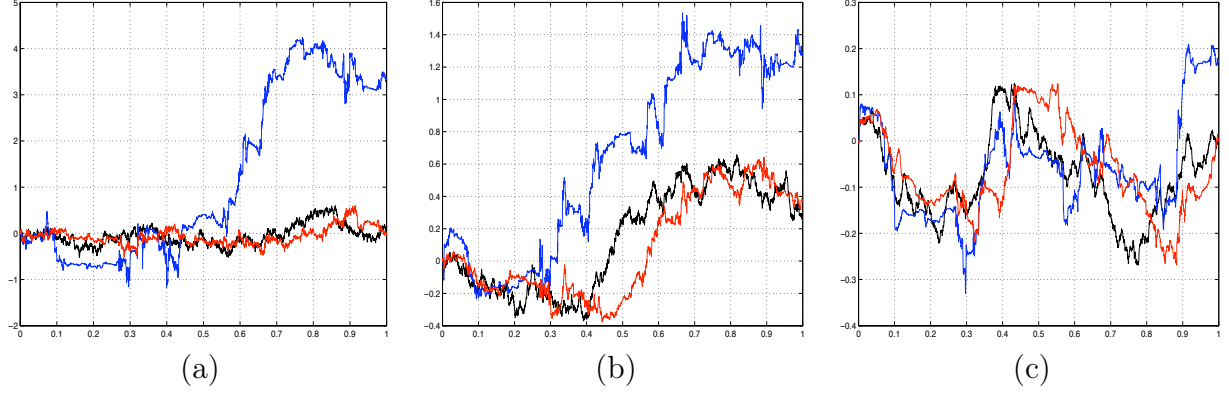


Fig. III.3: Comparaison entre les trajectoires d'une marche aléatoire multifractale (MRW) et d'un mouvement brownien fractionnaire (fBm) en temps multifractal en utilisant le même bruit infiniment divisible $Q\ell(u) : B^\kappa$ (noir), \tilde{Z}^κ (bleu/gris), V^κ (rouge/gris clair). (a) $\kappa < 0 < \kappa_c$; (b) $0 < \kappa < \kappa_c$; (c) $0 < \kappa_c < \kappa$.

où les notations (A), (E) et (B) signifient 'Above', 'Equal to' et 'Below' par rapport à la valeur critique κ_c tandis que (N) signifie 'Negative' lorsque $\kappa < 0$. Soit

$$\begin{aligned} \zeta(q) &= \begin{cases} (\kappa + \frac{1}{2})q + c\varphi(q), & \text{si (A),} \\ (\kappa_c + \frac{1}{2})q + c\varphi(q), & \text{si (E ou B ou N),} \end{cases} \\ &= (\kappa^* + \frac{1}{2})q + c\varphi(q), \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

où

$$\kappa^* = \max\{\kappa, \kappa_c\}. \quad (\text{III.27})$$

La fonction $\zeta(q)$ désigne les exposants de multiscaling. Nous aurons aussi besoin de la fonction

$$\tilde{\zeta}(q) = (\kappa + \frac{1}{2})q + c\varphi(q). \quad (\text{III.28})$$

Nous observons que $\zeta(q)$ dans (III.26) et la fonction $\tilde{\zeta}(q)$ coïncident dans le cas (A) et sont différentes dans les autres cas.

Dans les cas (E) et (B), nos résultats ont fait apparaître des sous-cas que nous avons noté (E*) et (B*) qui correspondent au cas où $\tilde{\zeta}'(2) < 0$ et $\tilde{\zeta}(q) > 1$ pour $q \in]1, 2]$.

2.1.3 Normalisation pour convergence

Une remarque préliminaire à cette étude concerne la normalisation de la définition naturelle (III.20) de Z_ℓ^κ , notamment dans les cas (E), (B) et (N) où $\kappa \leq \kappa_c$. Le résultat suivant porte sur les moments d'ordre pair de $Z_\ell^\kappa(t)$ lorsque $\kappa \in (0, 1/2)$.

Proposition III.2: *Si $p \in \mathbb{N}$ est tel que*

$$\zeta(2p) > 1, \quad (\text{III.29})$$

où la fonction ζ est définie par (III.26), alors pour $t \in \mathbb{R}$, dans la limite $\ell \rightarrow 0$,

$$E|Z_\ell^\kappa(t)|^{2p} \sim C(p, t)n(\ell)^{2p}, \quad (\text{III.30})$$

où

$$n(\ell)^2 = \begin{cases} 1, & \text{si } (A), \\ \ln \ell^{-1}, & \text{si } (E), \\ \ell^{c\varphi(2)+2\kappa}, & \text{si } (B) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

et $C(p, t)$ est une constante non nulle qui dépend de p, t ainsi que de κ_c et φ .

Remarquons que $n(\ell)$ dans (III.31) diverge lorsque $\ell \rightarrow 0$ dans les cas (E) et (B). Le cas $\kappa \in (-1/2, 0)$ est beaucoup plus délicat et seul le moment d'ordre $2p = 2$ sera étudié.

Proposition III.3: *Dans le cas (N), pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, dans la limite $\ell \rightarrow 0$,*

$$E|Z_\ell^\kappa(t)|^2 \sim C(t)n(\ell)^2 := C(t)\ell^{c\varphi(2)+2\kappa}, \quad (\text{III.32})$$

où $C(t)$ est une constante non nulle dépendant de t, κ, c et $\varphi(2)$.

Les relations (III.30) et (III.32) ci-dessus suggèrent que Z_ℓ^κ devrait être normalisée pour converger lorsque $0 \leq \kappa \leq \kappa_c$ ou $\kappa < 0$. Par conséquent nous définissons aussi

$$\tilde{Z}_\ell^\kappa(t) = \frac{Z_\ell^\kappa(t)}{n(\ell)}, \quad (\text{III.33})$$

où $n(\ell)$ est définie par (III.31) et (III.32).

2.2 Convergences

Nous résumons ici les différents résultats sur la convergence dans des sens mathématiques plus ou moins forts. Nous considérons la convergence des moments, la convergence L^2 , la convergence au sens des distributions, et la convergence dans L^q pour $1 < q \leq 2$. Ce type de résultats est essentiel puisque, même si dans la pratique c'est Z_ℓ^κ que nous simulerons, l'objet d'étude est bien l'objet Z^κ à la limite $\ell \rightarrow 0$. Le tableau III.1 récapitule les convergences valables pour les différents cas considérés pour permettre une lecture plus rapide. Ces résultats étant établis, nous pourrons enfin définir les processus qui nous intéressent ici :

Définition III.2: Le processus limite \tilde{Z}^κ de \tilde{Z}_ℓ^κ sera appelé *marche aléatoire multifractale issue d'une intégrale de Wiener fractionnaire* (ou *Multifractal Random Walk (MRW) as fractional Wiener integral* en anglais), ou plus simplement *marche aléatoire multifractale*, lorsqu'elle existe.

Cas	Paramètre κ	\tilde{Z}_ℓ^κ converge au sens des ...
(A)	$\kappa_c < \kappa < 1/2$	$L^2(\Omega)$; distributions ; moments (finis) ; presque sûrement
(E), (B)	$0 \leq \kappa \leq \kappa_c, \tilde{\zeta}'(2) > 0$	moments (finis) ; pas dans $L^2(\Omega)$; distributions si $\kappa = 0$ (conjecturé si $\kappa > 0$)
(E*), (B*)	$0 \leq \kappa \leq \kappa_c, \tilde{\zeta}'(2) < 0$ $\tilde{\zeta}(q) > 1$ pour un $q \in (1, 2)$	$L^q(\Omega)$; presque sûrement.
(N)	$-1/2 < \kappa < 0$	pas dans $L^2(\Omega)$; conjecturé pour distributions et moments.

Tab. III.1: Convergence de \tilde{Z}_ℓ^κ dans le cas invariant d'échelle.

On peut considérer de manière générale les processus définis à partir de

$$Z_\ell^{\kappa, \beta}(t) = \int_0^t (Q_\ell(u))^\beta dB^\kappa(u), \quad (\text{III.34})$$

où la CID $Q_\ell(u)$ est élevée à la puissance $\beta > 0$. Le choix $\beta = 1/2$ est précisément celui de Bacry & Muzy [25] et de Ludeña [135]. Il apparaît que l'écriture (III.34) peut toujours être mise sous la forme de (III.20).

La convergence la plus faible est celle des moments des valeurs absolues. Pour $m \in \mathbb{R}$, nous dirons que le moment d'ordre m de X_ℓ converge vers celui de X (resp. le moment de X_ℓ converge) si $\mathbb{E}|X_\ell|^m \rightarrow \mathbb{E}|X|^m$ (resp., $\mathbb{E}|X_\ell|^m$ converge pour $m \in \mathcal{M}$). Malgré sa faiblesse, la convergence des moments est importante pour les processus multifractals puisque leurs propriétés en échelle sont souvent définies pour les moments des valeurs absolues. Dans les cas (A), (E) et (B), c'est-à-dire pour $0 \leq \kappa < 1/2$, nous avons montré la convergence des moments de $\tilde{Z}_\ell^\kappa(t)$ d'ordre pair $m = 2p$ tels que $\zeta(2p) > 1$. Dans le cas (N), c'est-à-dire pour $-1/2 < \kappa < 0$, le moment d'ordre 2 de $\tilde{Z}_\ell^\kappa(t)$ converge par construction (voir plus haut). Nous conjecturons que le résultat de convergence démontré pour $0 \leq \kappa < 1/2$ est aussi valable dans ce cas.

Une autre convergence utile est la convergence $L^2(\Omega)$. Nous obtenons à cet égard un résultat contrasté pour le cas (A) d'une part et les cas (E), (B) et (N) d'autre part. En effet, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\tilde{Z}_\ell^\kappa(t)$ converge dans $L^2(\Omega)$ dans le cas (A), et ne converge pas dans $L^2(\Omega)$ dans les cas (E), (B) et (N). Dans le cas (A), un résultat plus fort que la convergence $L^2(\Omega)$ établit que, dans la limite $\ell \rightarrow 0$, la suite de processus $\{\tilde{Z}_\ell^\kappa(t)\}_{t \in [0,1]}$ converge presque sûrement (a fortiori au sens des distributions) dans l'espace des fonctions

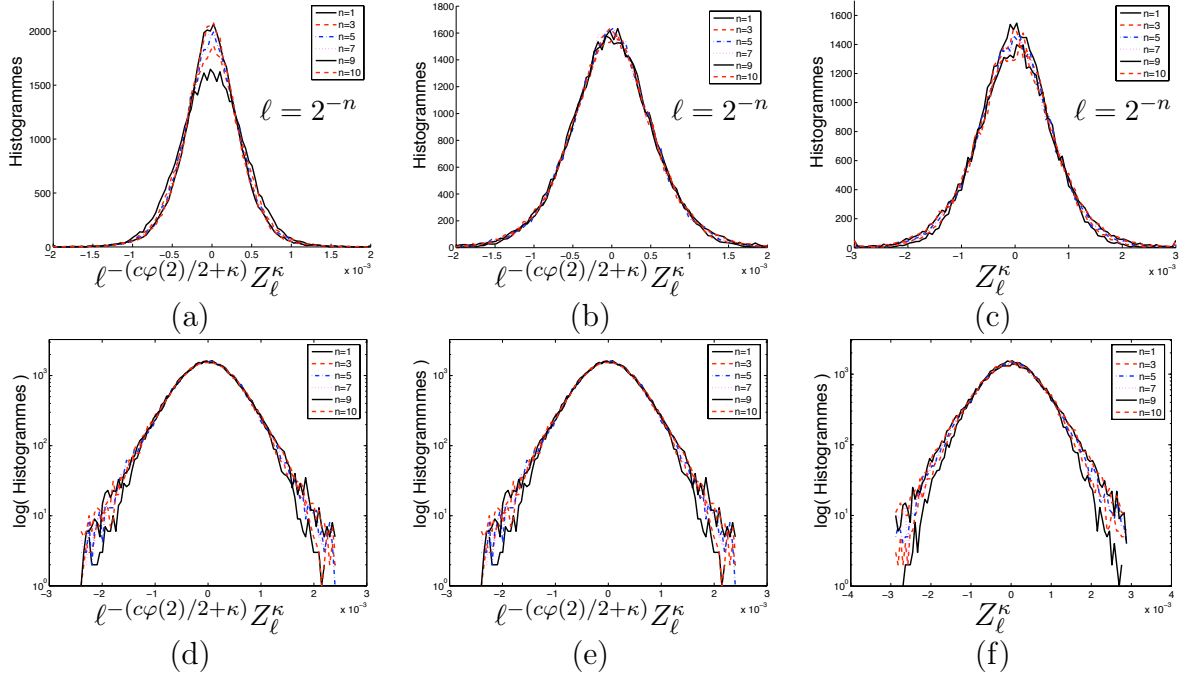


Fig. III.4: Histogrammes de $\tilde{Z}_r^\kappa(1)$ pour différentes résolutions ℓ variant de $1/1024$ à $1/2$.
 En haut : histogrammes pour (a) $\kappa = -0.1 < 0 < \kappa_c$, (b) $0 < \kappa = 0.05 < \kappa_c$,
 (c) $\kappa_c < \kappa = 0.2$. En bas : log-histogrammes pour (d) $\kappa = -0.1 < 0 < \kappa_c$, (e)
 $0 < \kappa = 0.05 < \kappa_c$, (f) $\kappa_c < \kappa = 0.2$.

continues $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Remarque : la convergence dans $L^2(\Omega)$ des marches aléatoires multifractales (cas (A)) implique la condition de non-dégénérescence (II.33) de la CID. En effet, dans le cas (A), on a $\zeta(1) = \kappa + 1/2 < 1$, $\zeta(2) = 2(\kappa - \kappa_c) + 1 > 1$ et $\zeta(q)$ est concave. Si l'on suppose ζ suffisamment régulière, les conditions ci-dessus imposent $\zeta'(1) > 0$. Or $\zeta'(1) = \kappa + 1/2 + c\varphi'(1) < 1 + c\varphi'(1) = \zeta'_{\text{IDC}}(1)$ de sorte que $\zeta'_{\text{IDC}}(1) > 0$, autrement dit, la condition (II.33) est vérifiée. La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Ayant constaté que la convergence L^2 n'était pas valable dans les cas où $-1/2 < \kappa \leq \kappa_c$, nous avons étudié une convergence plus faible, la convergence au sens des distributions. Lorsque $\kappa = 0$, nous savons que $\tilde{Z}_\ell^\kappa(t)$ converge au sens des distributions, p. 473 de [25]. Nous n'avons pas réussi à obtenir de résultat théorique et nous limitons à conjecturer la convergence au sens des distributions dans les cas (E), (B) et (N). Cette conjecture est corroborée par le résultat de simulations numériques. La figure III.4 représente les histogrammes de $\tilde{Z}_\ell^\kappa(1)$ pour ℓ variant de $1/2$ à $1/1024$, respectivement pour $\kappa < 0 < \kappa_c$ (cas (N)), $0 < \kappa < \kappa_c$ (case (B)) et $0 < \kappa_c < \kappa$ (case (A)). Chaque histogramme provient de 40000 réalisations de $\tilde{Z}_\ell^\kappa(1)$ pour une cascades Poisson composée $Q_\ell(t)$ telle que $\varphi(2) = -0.24$ et $c = 1$. La situation critique correspond au cas où $\kappa_c = -c\varphi(2)/2 = 0.12$. Dans tous les cas, les histogrammes se superposent bien et confortent la conjecture.

Remarque : certains résultats de convergence précédents peuvent être complétés par un résultat de convergence dans $L^q(\Omega)$, $1 < q \leq 2$, voir tableau III.1.

2.3 Simulation numérique

Le processus Z_ℓ^κ de (III.20) peut être simulé simplement de la façon suivante. Pour obtenir N échantillons $Z_\ell^\kappa(n/N)$, $n = 0, \dots, N-1$, à des instants régulièrement espacés dans $[0, 1)$, nous tirons $K = RN$ échantillons régulièrement espacés $B^\kappa(k/K)$ et $Q_\ell(k/K)$, $k = 0, \dots, K-1$, du fBm B^κ et de la CID Q_ℓ . La constante entière R est un facteur de suréchantillonnage. Les intégrales continues de (III.20) sont alors approchées par la somme de Riemann :

$$Z_\ell^\kappa\left(\frac{n}{N}\right) \simeq \sum_{k=1}^{nR} Q_\ell\left(\frac{k}{K}\right) \left(B^\kappa\left(\frac{k}{K}\right) - B^\kappa\left(\frac{k-1}{K}\right) \right). \quad (\text{III.35})$$

Les échantillons $B^\kappa(k/K)$ du fBm en utilisant la méthode de la matrice circulante [28]. La simulation d'une CID est décrite dans la partie II.1.7 de ce document. En pratique, la résolution ℓ de Q_ℓ doit être choisie telle que $\ell \geq 1/K$.

La figure III.3 des trajectoires de Z_ℓ^κ issues d'une cascade Poisson composée. La même trajectoire de Q_ℓ , voir figure II.3(a) p. 36, a été utilisée pour produire les trajectoires de \tilde{Z}^κ dans les trois cas $\kappa < 0 < \kappa_c$, $0 < \kappa < \kappa_c$ et $0 < \kappa_c < \kappa$. La figure III.3 représente aussi les trajectoires des fBm en temps multifractal $V^\kappa(t) = B^\kappa(X(t))$ défini par (III.5). Remarquons au passage que, grâce aux sommes de Riemann (III.35), la simulation des marches aléatoires multifractales est beaucoup plus simple que celle des fBm à temps multifractal qui nécessite un rééchantillonnage du fBm.

2.4 Propriétés

Nous avons étudié les principales propriétés des marches aléatoires multifractales issues d'une intégrale de Wiener fractionnaire. Comme aucune forme de convergence n'a pu être prouvée dans le cas (N) dans la partie 2.2, ce cas est exclu de l'étude.

Accroissements stationnaires. Dans le cas (A), les accroissements de la marche aléatoire multifractale \tilde{Z}^κ sont strictement stationnaires car $Q_\ell(u)$ est stationnaire et $B^\kappa(u)$ est à accroissements stationnaires. Par conséquent, la série temporelle des accroissements $X_k = \tilde{Z}^\kappa((k+1)\tau) - \tilde{Z}^\kappa(k\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, pour $\tau > 0$, de \tilde{Z}^κ est stationnaire. De même dans les cas (E) et (B), les accroissements de la marche aléatoire \tilde{Z}^κ sont stationnaires au second ordre et la série X_k est stationnaire au second ordre.

Corrélations. Nous observons deux comportements diamétralement opposés aux temps longs. Dans le cas (A), \tilde{Z}^κ est de moyenne nulle et sa covariance est telle que, pour $k \geq 1/\tau + 1$, $\mathbb{E}X_k X_0 \sim |k|^{2\kappa-1}$ lorsque $k \rightarrow \infty$; comme $-1 < 2\kappa - 1 < 0$, les séries

temporelles X_k sont à dépendance longue dans ce cas. Dans les cas (E) et (B), \tilde{Z}^κ a pour covariance $\mathbb{E}\tilde{Z}^\kappa(s)\tilde{Z}^\kappa(t) = Cs$ pour $0 \leq s \leq t$ de sorte que $\mathbb{E}X_kX_0 = 0$, pour $k \neq 0$: les accroissements sont décorrélés lorsque $0 \leq \kappa \leq \kappa_c$.

Auto-similarité statistique. L'invariance d'échelle exacte (II.19) mène à une propriété d'invariance d'échelle statistique pour les marches aléatoires multifractales associées. Dans le cas de l'invariance d'échelle exacte, on a, pour $a \in (0, 1)$,

– dans le cas (A) :

$$\{\tilde{Z}^\kappa(at)\}_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} a^{\kappa+\frac{1}{2}} e^{\Omega_a} \{\tilde{Z}^\kappa(t)\}_{t \in [0,1]}, \quad (\text{III.36})$$

– dans les cas (E) et (B) :

$$\{\tilde{Z}^\kappa(at)\}_{t \in [0,1]} \stackrel{m}{=} a^{\kappa_c+\frac{1}{2}} e^{\Omega_a} \{\tilde{Z}^\kappa(t)\}_{t \in [0,1]} \quad (\text{III.37})$$

où $\stackrel{m}{=}$ signifie l'égalité des moments d'ordre pair (s'ils existent) des combinaisons linéaires de distributions.

Dans (III.36) et (III.37), Ω_a est une variable aléatoire indépendante de $\{\tilde{Z}^\kappa(t)\}_{t \in [0,1]}$ et de fonction génératrice des moments (II.23). Les lois d'échelle pour les moments découle des relations d'auto-similarité. Le cas de l'invariance d'échelle exacte est particulièrement simple. Dans le cas de l'invariance d'échelle exacte (II.19) et pour $0 \leq \kappa < 1/2$ (cas (A), (E) et (B)), on montre, pour $t \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(t)|^q = C_q t^{\zeta(q)}, \quad (\text{III.38})$$

où $\zeta(q)$ est définie par (III.26), et $q > 0$ est tel que $\mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(1)|^q < \infty$. La condition $\mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(1)|^q < \infty$ s'exprime directement comme une condition sur $\zeta(q)$ pour les ordres pairs. Il faut noter que pour $0 \leq \kappa \leq \kappa_c$ (cas (E) et (B)), les exposants $\zeta(q)$ ne dépendent que de κ_c et non de κ . Dans le cas (A), on a $\mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(t)|^2 = C_2 t^{2\kappa+1+c\varphi(2)}$ dans la limite $t \rightarrow 0$ d'une part, et $\mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(t)|^2 \sim \tilde{C}_2 t^{2\kappa+1}$ dans la limite $t \rightarrow \infty$ d'autre part. Le moment d'ordre 2 obéit à des comportements en loi de puissance différents aux petites et aux grandes échelles. C'est un comportement attendu puisque les petites échelles sont influencées par la CID Q_ℓ tandis que les grandes échelles sont essentiellement pilotées par le fBm B^κ .

Dans le cas de l'invariance d'échelle simple (II.18), les lois d'échelle ne sont plus exactement des lois de puissance même si le comportement (III.38) est attendu dans la limite $t \rightarrow 0$. Sous des hypothèses un peu techniques, telles que celles utilisées dans le théorème II.1, nous avons montré qu'il existe des constantes \underline{C}_q et \overline{C}_q telles que, pour $t \in]0, 1]$,

$$\underline{C}_q t^{\zeta(q)} \leq \mathbb{E}|\tilde{Z}^\kappa(t)|^q \leq \overline{C}_q t^{\zeta(q)}, \quad (\text{III.39})$$

où $\zeta(q)$ est définie par (III.26). Ce résultat est à rapprocher du théorème 8 de [25] qui énonce un comportement asymptotique de même nature dans la limite $t \rightarrow 0$.

2.5 MRW et fBm à temps multifractal

Enfin, nous avons étudié les relations entre le mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal $V_H = V^\kappa$ défini comme la limite de (III.5) et la marche aléatoire

multifractale Z^κ définie comme la limite de (III.20) lorsque $\ell \rightarrow 0$. Dans le cas le plus simple où $H = 1/2 \Leftrightarrow \kappa = 0$, on peut montrer [25, 64] l'égalité au sens des distributions de dimension finie entre V_ℓ^0 , le mouvement brownien à temps multifractal défini par (III.5) pour $\kappa = 0 \Leftrightarrow \beta = 1/2$, et la marche aléatoire multifractale

$$Z^{\kappa, \beta}(t) = Z^{0, 1/2}(t) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \underbrace{\int_0^t (Q_\ell(u))^\beta dB^\kappa(u)}_{Z_\ell^{0, 1/2}(t)}.$$

Dans un cadre plus général, nous avons aussi comparé les marches aléatoires multifractales Z^κ et les fBm en temps multifractal V^κ pour $\kappa \neq 0$. Une question est de savoir si ces processus obéissent aux mêmes lois d'échelle avec les mêmes exposants, et plus généralement s'ils ont les mêmes distributions de dimension finie. On peut montrer qu'en s'autorisant à choisir les paramètres κ et φ indépendamment pour Z^κ et V^κ il est possible de construire des processus ayant les mêmes exposants multifractals. Il est très technique et délicat de montrer leur éventuelle égalité au sens des distributions de dimension finie pour laquelle nous n'avons par conséquent pas de réponse. Dès lors que soit κ soit φ sont identiques, les exposants multifractals sont nécessairement différents, ce qui exclut une égalité au sens des distributions de dimension finie.

3 Conclusion & Perspectives

L'objet de cette partie était la construction de processus aléatoires multifractals possédant des accroissements symétriques positifs ou négatifs. Nous avons effectué quelques brefs rappels quant au *mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal* avant de nous intéresser plus en profondeur aux *marches aléatoires multifractales* issues d'une intégrale de Wiener fractionnaire, autrement dit une intégrale stochastique contre un mouvement brownien fractionnaire. Nous avons ainsi établi la définition formelle du processus à temps continu initialement proposé sous forme d'une somme discrète par Bacry, Delour & Muzy (2001) sous le nom de MRW pour Multifractal Random Walk. Nous avons aussi étudié dans le détail les propriétés et les lois d'échelle de ces processus ainsi que leurs liens avec les fBm à temps multifractal. Ce travail a nécessité un important effort de dialogue avec les mathématiciens, autant en amont pour bien préciser les objectifs et les questions à traiter que tout au long du travail pour maîtriser la portée des résultats obtenus.

Ce sujet semble maintenant suffisamment bien compris en dimension 1. Certains travaux ont d'ailleurs aussi exploré l'introduction d'une éventuelle dissymétrie (skewness) entre les accroissements positifs et négatifs grâce à l'introduction d'une corrélation entre le fBm et la CID utilisés ; citons notamment les travaux de Pochart & Bouchaud (2002) [164] et plus récemment de Robert & Vargas (2008) [171]. Les principales problématiques à venir sont la définition d'équivalent de ces processus scalaires en dimension $d \geq 2$ et, à un niveau de difficulté encore supérieur, la définition de champs vectoriels multifractals. Une autre piste de travail est la construction de marches aléatoires à lois d'échelle infiniment divisibles, c'est-à-dire obéissant à des lois d'échelle qui ne soient pas nécessairement en loi de puissance mais de la forme $\exp(-\zeta(q)n(\tau))$. Cette piste paraît intéressante à creuser

d'une part pour l'étendue des modèles auxquels elle donnerait accès, d'autre part pour l'approfondissement de la notion d'échelle dans la construction de ces processus qu'elle impliquerait.

IV. Estimation d'exposants de lois d'échelle

L'utilisation des modèles décrits précédemment pour la modélisation d'un système suppose l'identification des paramètres que sont les exposants multifractals ($\zeta(q)$ ou $\tau(q)$). Ce chapitre décrit notre contribution concernant l'estimation d'exposants de lois d'échelle de processus multifractals depuis 2001. Tandis que les aspects abordés dans ma thèse visaient à la caractérisation en termes de biais et variance d'estimateurs à base de transformée en ondelette discrète, les travaux présentés ici s'intéressent aux limitations éventuelles quant à la gamme de valeurs de l'ordre q des exposants à estimer. Les estimateurs ont généralement un comportement relativement difficile à caractériser. Dans le cadre de la thèse de B. Lashermes [127] et en collaboration avec P. Abry, nous avons étudié le comportement statistique d'estimateurs d'exposants de multiscaling reposant sur des quantités multirésolution (accroissements, coefficients d'ondelette, coefficients d'agrégation, MMT, coefficients dominants). Ces estimateurs résultent de régressions linéaires effectuées dans des diagrammes log-log des fonctions de structure en fonction de l'échelle. En utilisant différents types de processus multifractals, nous avons montré par une étude numérique détaillée que tous les estimateurs étudiés présentent un effet de linéarisation : pour une gamme d'ordres q , les estimateurs correspondent bien aux exposants multifractals attendus ; en dehors de cette gamme, les estimations présentent systématiquement un comportement linéaire en fonction de l'ordre q . Nous avons mené une étude numérique approfondie de cet effet de linéarisation et discuté ses causes. Notre conclusion est que, contrairement à différentes interprétations présentes dans la littérature, cet effet n'est pas un effet de taille finie ni un problème de divergence de moments ; il est manifestement lié à la nature même des processus considérés. Ces conclusions sont cohérentes avec les résultats théoriques qui existent pour la famille très restreinte des cascades binomiales. Nous avons examiné les conséquences de ces observations quant à l'analyse de données expérimentales, en turbulence notamment. Ce travail a été publié dans [128, 130]. À la fin de ce chapitre, nous évoquons aussi une étude exploratoire de l'adaptation de l'analyse multifractale à base d'ondelette sur la sphère [120], travail mené dans le cadre de la thèse d'Émilie Koenig.

1 Modèles multifractals et estimation

1.1 Caisse à outils

Avant d'aborder notre travail sur l'effet de linéarisation, nous revenons sur quelques outils disponibles pour l'estimation d'exposants de loi d'échelle. Il faut d'abord remarquer, quitte à rappeler une (fausse) évidence, qu'il est nécessaire de bien choisir l'estimateur en fonction de l'objet mathématique considéré. L'ordre des accroissements généralisés sera

choisi en fonction du degré de stationnarité du processus, le nombre de moments nuls de l'ondelette utilisée sera fonction de la présence d'une tendance polynômiale éventuelle... Il s'agit aussi de prendre garde au domaine de validité de l'estimateur : si les données sont trop irrégulières, de type distribution ou processus généralisé par exemple, la phase d'estimation devra être combinée à une phase d'intégration.

En turbulence, le moment d'ordre 3 des accroissements du champ de vitesse avec, $\langle |\delta_r v|^3 \rangle$, ou sans valeur absolue $\langle \delta_r v^3 \rangle$, est certainement la quantité qui a été la plus étudiée puisque c'est une des seules pour laquelle on dispose de résultats théoriques, notamment la loi des 4/5 [92]. La loi des 4/5 prédit précisément que, dans la limite des nombres de Reynolds infinis,

$$\langle \delta_r v^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (\text{IV.1})$$

où ε est la dissipation moyenne par unité de masse. Le premier modèle de référence en turbulence est celui de Kolmogorov 1941 [123] que l'on peut voir comme une généralisation de la loi des 4/5 aux ordres $q \neq 3$ sur la base d'un argument dimensionnel qui prédit que $\langle \delta_r v^q \rangle \sim r^{q/3}$. Ainsi, le modèle de Kolmogorov 1941 [123] revient essentiellement à modéliser le champ de vitesse turbulent par un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H = 1/3$. Le spectre de Fourier attendu est donc en $k^{-5/3}$. Les physiciens de la turbulence se sont ainsi implicitement appuyés sur un estimateur de pente par régression linéaire dans un diagramme log-log du spectre de Fourier estimé pour tester la théorie. Ils ont pris l'habitude de toujours jeter un œil au comportement du spectre et du moment d'ordre 3 des accroissements de la vitesse. Enfin, puisque les gammes d'échelles utiles pour l'estimation d'exposants étaient souvent réduites, il a fallu chercher des moyens d'améliorer la qualité des estimations. C'est ainsi qu'est apparue la fameuse ESS, *Extended Self-Similarity* ou auto-similarité étendue, c'est-à-dire l'observation du comportement en loi de puissance d'un moment d'ordre q en fonction d'un moment d'ordre p (typiquement $p = 3$ en turbulence).

Ces démarches d'estimation, naturelles pour le physicien, sont beaucoup moins simples à formaliser pour le mathématicien qui doit d'abord donner un sens au mot "spectre" (souvent synonyme de "fft²" pour le bétien...) pour un processus auto-similaire donc non-stationnaire... Ce sont les notions de mesure et de densité spectrales pour les processus généralisés à accroissements stationnaires qui permettent de définir proprement cette notion (voir [42] pour une présentation synthétique). La mesure spectrale du mouvement brownien fractionnaire B_H est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par la fonction radiale

$$f(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^{-2H-d}. \quad (\text{IV.2})$$

En dimension $d = 1$, on retrouve bien le spectre en $k^{-5/3}$ associé à $H = 1/3$ dans la théorie K41. Pour estimer numériquement l'exposant H , Istaş & Lang (1997) [110] ont étudié la loi d'échelle des variations quadratiques généralisées de X :

$$V_{m,l}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m} \left(\Delta^m X \left(\frac{k}{N}, \frac{l}{N} \right) \right)^2, \quad (\text{IV.3})$$

où N est la longueur des trajectoires de X et m est l'ordre des accroissements généralisés

considérés :

$$\Delta^m X(t, s) = \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^{m-k} X(t + ks). \quad (\text{IV.4})$$

Les variations quadratiques généralisées se comportent en loi de puissance dans la limite où $N \rightarrow \infty$:

$$V_{m,l}(X) \sim l^{2H}. \quad (\text{IV.5})$$

Ce résultat se généralise aux q -variations pour $q \neq 2$ pour les processus auto-similaires mais un résultat de J.-F. Cœurjolly [70] montre que l'ordre 2 est optimal pour les mouvements browniens fractionnaires. Par contre, les q variations pourront apporter une information supplémentaires dans l'étude des processus multifractals, voir §2.1.

Au-delà des accroissements généralisés, la meilleure approche consiste à s'appuyer sur les outils d'analyse temps-fréquence [89] ou temps-échelle [3, 4, 6, 8, 90] plutôt que sur les accroissements pour estimer le paramètre d'auto-similarité. La transformée en ondelette, grâce à sa nature multirésolution, est particulièrement adaptée pour l'estimation d'exposants de lois d'échelle.

La méthode des Maxima des Modules de la Transformée en Ondelettes (MMTO, ou WTMM en anglais) s'appuie sur la détection de lignes de maxima associées à la présence de singularités dans le signal étudié [19, 27, 117, 118]. C'est la première méthode ayant permis d'estimer les exposants multifractals d'ordres aussi bien négatifs que positifs. La méthode MMTO proposée par Bacry, Muzy & Arneodo [27] s'appuie notamment sur les théorèmes de Jaffard [112] ainsi que sur des théorèmes d'existence des lignes connexes de maxima de la transformée en ondelettes de type dérivée de la gaussienne pour les signaux L^2 [138]. Malgré sa puissance indéniable, la méthode MMTO est relativement lourde à mettre en œuvre et surtout coûteuse en temps de calcul.

D'autres travaux se sont intéressés aux estimateurs utilisant une transformée en ondelettes discrète [1, 8, 54, 114, 212]. Ce type d'approches s'appuie sur les résultats théoriques de Meyer [145] (voir [113, 169] pour une présentation détaillée). Elles ont l'avantage d'être légères et donc rapides. L'introduction récente des coefficients dominants (wavelet leaders) par Jaffard, Lashermes & Abry (2006) [114] a permis l'extension de cette analyse aux ordres négatifs. L'utilisation de techniques de bootstrap par Wendt et ses collaborateurs (2007-2009) [211–213] apporte même la possibilité d'assortir les estimations d'intervalles de confiance.

Lorsque l'objet étudié X correspond à la distribution d'une mesure aléatoire μ , les accroissements ou les coefficients d'ondelette appliqués directement à X ne sont plus pertinents. La quantité multi-échelle mesurable doit émaner justement de la mesure $\mu(A) = \int_A X$ elle-même. La quantité la plus simple est la mesure de boîte aussi appelée moyenne par boîte ou coefficient d'agrégation. Soit $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)$ la boule de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ (pour une norme de \mathbb{R}^d donnée) centrée en \mathbf{x} , le coefficient d'agrégation de X à l'échelle r à la position \mathbf{x} est défini par :

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)|} \mu(\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)) = \frac{1}{|\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)|} \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)} X \quad (\text{IV.6})$$

où $|\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)|$ est le volume de $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)$, ou plus savamment sa mesure de Lebesgue. On peut étudier les propriétés multi-échelles de X en étudiant la dépendance en échelle des moments $\mathbb{E}\varepsilon_r^q$ [16]. De façon analogue aux accroissements généralisés, on peut définir une version généralisée des coefficients d'agrégation, voir §2.1.

1.2 Motivations

Les estimateurs du paramètre d'auto-similarité H des processus auto-similaires tels que le mouvement brownien fractionnaire ou les mouvements fractionnaires linéairement stables (LFSM) ont été étudiés en détail [3]. Par contre, bien que les modèles multifractals aient été proposés dans des domaines variés allant de la turbulence au trafic informatique en passant par la finance, les rythmes biologiques et l'analyse d'image, peu de travaux [21, 54, 98] avaient été consacrés à cette époque à l'étude systématique des estimateurs utilisés pour l'analyse. Cette situation est due à la difficulté de l'analyse théorique de ces estimateurs d'une part, et certainement aussi à l'absence jusqu'à très récemment de processus multifractals de référence permettant une étude numérique précise. Ce dernier verrou ayant été levé au début des années 2000 (voir parties II & III), une étude numérique est devenue possible.

Or certains comportements "suspects" des estimateurs ont pu être observés par différents auteurs, notamment aux ordres élevés. La question de savoir jusqu'à quel ordre maximal (8 ? 15 ? 30 ? ...) il était raisonnable d'estimer des exposants multifractals à partir d'une mesure de champ de vitesse turbulente a fait l'objet de nombreux débats. Divers argumentaires, plus ou moins "avec les mains", ont été avancés pour expliquer l'existence d'une borne supérieure ainsi que d'une borne inférieure au-delà desquelles l'estimation des exposants de lois d'échelle n'était plus exploitable. Nous nous sommes appliqués à identifier systématiquement ces bornes sur la base de simulations numériques de processus multifractals de référence, ainsi qu'à discuter les argumentaires proposés dans la littérature.

Dans le paragraphe précédent, nous avons évoqué les difficultés que pouvait poser l'estimation des exposants de lois d'échelle ainsi que l'arsenal d'outils développé pour y répondre. L'une de ces difficultés est liée à la gamme des ordres q accessibles à l'estimation puisque les ordres négatifs sont numériquement problématiques si l'on ne fait pas appel à une méthode de maxima (MMTO ou coefficients dominants). Une autre difficulté attendue peut provenir de la quantité de données disponible pour l'estimation qui doit a priori être d'autant plus grande que l'on considère des ordres élevés. Il apparaît que le signe de q ou la taille des données ne sont pas les seules sources de limitation quant à la gamme des ordres accessibles pour l'estimation d'exposants de lois d'échelle. Certains résultats mathématiques peuvent nous mettre sur la voie de l'origine de ces limitations. Le théorème 4 de [33] sur l'analyse multifractale des cascades de Poisson composées énonce la validité d'un formalisme multifractal pour ces mesures multifractales caractérisées par les exposants multifractals $\tau(q)$:

Théorème (Barral, Mandelbrot).

Supposons que τ est fini sur un intervalle J contenant un voisinage de $[0, 1]$, et que

$\tau'(1) > 0$. Soit $J' = \{q \in \text{int}(J); \tau'(q)q - \tau(q) > 0\}$, $I' = \{\tau'(q); q \in J'\}$, $h_{\inf} = \inf(I')$ et $h_{\sup} = \sup(I')$ ($[0, 1] \subset J'$, $I' \subset]0, \infty[$, $h_{\inf} > 0$). Avec probabilité 1 :

1. pour tout $h \in I'$, $\dim_H E_h = \tau^*(h)$.

2. si $\tau^*(h_{\inf}) = 0$ alors pour tout $h \in]0, h_{\inf}[$, $H_h = \emptyset$. Si $h_{\sup} < \infty$ et $\tau^*(h_{\sup}) = 0$ alors pour tout $h \in]h_{\sup}, \infty[$, $E_h = \emptyset$.

où $\tau^*(h)$ est la transformée de Legendre de $\tau(q)$ (voir §I.2.2 et §II.1 pour la définition de $\tau(q)$). Dans ce cas, le formalisme multifractal fait apparaître l'intervalle J' associé aux ordres q tels que $\tau'(q)q - \tau(q) > 0$. Par conséquent, on peut aussi soupçonner que, s'ils existent, les ordres q tels que $\tau'(q)q - \tau(q) = 0$ jouent un rôle particulier lorsqu'on s'intéresse à l'estimation des $\tau(q)$ grâce aux exposants des lois d'échelle. C'est précisément ce que le travail que nous décrivons maintenant a permis de caractériser sous le nom d'*effet de linéarisation*.

2 Mise en évidence de l'effet de linéarisation

2.1 Procédures d'estimation

La plupart du temps, les propriétés d'invariance d'échelle d'un signal $X(t)$ impliquent une quantité multirésolution que nous décrivons sous la forme générique $T_X(a, t) = \langle X, \psi_{a,t} \rangle$ où $\psi_{a,t}(s) = \frac{1}{a}\psi(\frac{s-t}{a})$. Si ψ est une ondelette mère, on obtient les coefficients d'une transformée en ondelettes avec N moments nuls. Si $\psi = 1_{[0,1]}^{*N}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$ convoluée N fois, on obtient les coefficients d'agrégation généralisés. Le choix $\psi = [\delta_{-1} - \delta]^{*N}$ correspond aux accroissements (ou variations) généralisés d'ordre N , voir aussi eq. (IV.3). Nous ne travaillons ici qu'avec des estimateurs issus de transformées discrètes telles que la transformée en ondelette discrète sur une base orthogonale. On définit alors les fonctions de structure associées à la quantité choisie sur une grille dyadique par :

$$S_n(q, a_j; \psi) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |T_X(a_j, t_{j,k}; \psi)|^q, \quad (\text{IV.7})$$

où n est la durée d'observation du signal X et n_j est le nombre coefficients disponibles à l'échelle a_j , soit approximativement $n_j \simeq n/a_j$. Lorsque les $T_X(a, t)$ sont stationnaires, les moyennes temporelles S_n peuvent être vues comme des estimateurs des moyennes d'ensemble $\mathbb{E}|T_X(a, t)|^q$ (sous une hypothèse implicite d'ergodicité).

Les estimateurs standards s'appuient sur le comportement en loi de puissance attendu pour les fonctions de structure :

$$S_n(q, a_j; \psi) \sim a_j^{\zeta(q)}. \quad (\text{IV.8})$$

On utilise des régressions linéaires (non pondérées) dans des représentations log-log de $Y_{q,j} = \log_2 S_n(q, 2^j; \psi)$ en fonction de $\log_2 2^j = j$:

$$\hat{\zeta}(q, n) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j Y_{q,j}, \quad (\text{IV.9})$$

où l'approximation linéaire est recherchée dans la gamme d'octaves $j \in [j_1, j_2]$. Sur la base d'éléments développés dans ma thèse [54], nous avons choisi d'utiliser des régressions non pondérées. Dans ce cas, les poids w_j sont donnés par : $w_j = (S_0 j - S_1)/(S_0 S_2 - S_1^2)$, avec $S_m = \sum_{j_1}^{j_2} j^m$, $m = 0, 1, 2$, de sorte que $\sum_j j w_j \equiv 1$ et $\sum_j w_j \equiv 0$.

Lorsqu'on utilise les coefficients d'ondelette ou les accroissements généralisés, la valeur zéro est atteinte avec probabilité non-nulle de sorte que les moments ne sont définis que pour $q > -1$. Il en sera de même pour l'estimateur $\hat{\zeta}(q, n)$. L'utilisation de la MMTTO ou des coefficients dominants permettra de dépasser cet obstacle. Les coefficients d'agrégation ne sont pas concernés par cette limitation puisqu'ils ne sont utilisés que pour analyser des signaux positifs, de type densité d'une mesure par exemple.

2.2 Méthode d'analyse numérique

Nous avons étudié le comportement (biais, variance) des trois familles d'estimateurs décrits plus haut en accumulant les résultats d'estimation issus d'un grand nombre de réalisations de processus multifractals de référence. Ces processus étaient construits à partir de trois types de cascades multiplicatives : les cascades binomiales, les cascades Poisson composées et les cascades log-normales. Les processus considérés sont les cascades $Q_\ell(x)$ elles-mêmes vues comme la densité d'une mesure, la mesure associée $A(t) = \mu([0, t]) = \int_0^t Q_\ell$, le mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal $Y(t) = B_H(A(t))$, et la marche aléatoire multifractale $Z_\ell(t) = \int Q_\ell dB_H$, voir parties II & III. On s'attend alors (naïvement) à observer des lois d'échelle gouvernées par la fonction $\varphi(q)$ caractéristique de la mesure multifractale sous-jacente : $\zeta(q) = \varphi(q)$ pour la densité, $\zeta(q) = q + \varphi(q)$ pour la mesure, $\zeta(q) = qH + \varphi(qH)$ pour le fBm en temps multifractal, $\zeta(q) = qH + \varphi(q)$ pour la marche aléatoire multifractale.

Le nombre d'échantillons d'une réalisation est noté $n = 2^{J_L}$. La longueur de corrélation (échelle intégrale de la cascade par exemple) est 2^J . La durée d'une réalisation s'exprime ainsi comme $n_L = 2^{J_L - J}$ échelles intégrales. L'étude a été menée pour différents choix de transformées $T_X(a, t)$ de différents ordres $1 \leq N \leq 10$ en utilisant par exemple 1000 réalisations d'un même processus, $8 \leq J \leq 17$, $9 \leq J_L \leq 16$, $j_1 = 3$, $j_2 = \min(J - (2N + 1), J_L - 1)$. Il s'agissait aussi de caractériser l'influence de la taille (2^{J_L}) et de la résolution (2^{-J}) du signal analysé.

2.3 Mise en évidence et description

Les observations numériques, voir figure IV.1, nous ont amenés à définir les quantités h_*^- et h_*^+ , points d'annulation du spectre multifractal des processus analysés, $D(h_*^-) = D(h_*^+) = 0$, correspondant respectivement à h_{sup} et h_{inf} dans le théorème de Barral et Mandelbrot cité plus haut. Il faut aussi définir q_*^- et q_*^+ associés à h_*^- et h_*^+ par transformée de Legendre, c'est-à-dire tels que

$$h_*^\pm = \left. \frac{d\zeta}{dq} \right|_{q=q_*^\pm}. \quad (\text{IV.10})$$

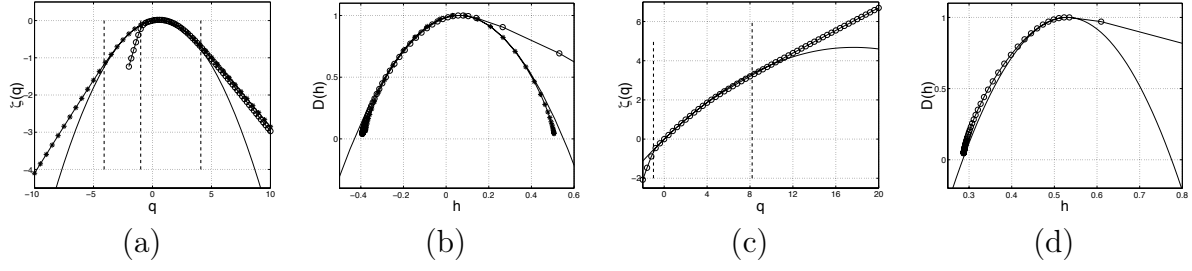


Fig. IV.1: **Effet de linéarisation observé sur $\hat{\zeta}(q, n)$ et $\hat{D}(h)$ obtenue par transformée de Legendre** : (a) & (b) pour une cascade binomiale avec coefficients d'agrégation (*) et d'ondelettes (o) comparés à $\zeta(q) = m(q - q^2)$ (trait plein), $m = 0.06$; (c) & (d) pour un mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal. Les valeurs $q = q_{\pm}^*$ ou $q = -1$ sont repérées par des lignes verticales.

En dimension 1, les ordres q_{\pm}^* sont ainsi, lorsqu'ils existent, les solutions de l'équation :

$$\zeta(q) - q\zeta'(q) = 1. \quad (\text{IV.11})$$

Nous avons systématiquement observé le comportement suivant. Pour $q \in [q_{\pm}^-, q_{\pm}^+]$ lorsque q_{\pm}^- a un sens ou pour $q \in [-1, q_{\pm}^+]$ sinon, les $\hat{\zeta}(q, n)$ convergent bien vers les exposants $\zeta(q)$ attendus par construction des processus de référence. Pour $q \notin [q_{\pm}^-, q_{\pm}^+]$ lorsque q_{\pm}^- a un sens ou pour $q \notin [-1, q_{\pm}^+]$ sinon, les $\hat{\zeta}(q, n)$ s'écartent significativement de $\zeta(q)$ et obéissent à un comportement linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow 1 + h_{\pm}^{\pm} q, & q \leq q_{\pm}^-, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow \zeta(q), & q_{\pm}^- \leq q \leq q_{\pm}^+, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow 1 + h_{\pm}^{\pm} q, & q_{\pm}^+ \leq q. \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

lorsque q_{\pm}^- a un sens, ce qui est le cas pour les coefficients d'agrégation, l'estimateur MMTO ou à coefficients dominants. Dans le cas où q_{\pm}^- n'est pas bien défini (accroissements et coefficients d'ondelette),

$$\begin{cases} \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow \zeta(q), & -1 < q \leq q_{\pm}^+, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow 1 + h_{\pm}^{\pm} q, & q_{\pm}^+ \leq q. \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Nous avons parlé d'effet de linéarisation car bien que l'on continue à observer des lois de puissance pour des ordres $q \notin [q_{\pm}^-, q_{\pm}^+]$, les exposants estimés sont une fonction linéaire de q et non une fonction du générateur du processus lié à $\varphi(q)$. Notre étude a montré que l'on pouvait observer cet effet même sur une seule réalisation. Il n'est pas le résultat d'une moyenne. Il n'est pas non plus une conséquence d'un effet de taille finie des données puisque les espérances des estimateurs des points critiques $q_{\pm}^-, q_{\pm}^+, h_{\pm}^+$ et h_{\pm}^- sont très faiblement dépendantes de la longueur n des réalisations. Plus précisément, ces observations restent valables aussi bien dans la limite d'un nombre d'échelles intégrales n_L infini à résolution constante que dans la limite d'une résolution infiniment petite et $n_L = 1$. Cependant, dans le premier cas, la variance des estimateurs cesse rapidement de décroître lorsque $n \rightarrow \infty$, tandis qu'elle décroît et semble tendre vers 0 dans le second cas.

En résumé, nous avons mis en évidence un effet de linéarisation pour une grande variété de processus multifractals bien définis et pour divers estimateurs, y-compris MMTO et coefficients dominants. L'effet de linéarisation n'est pas un effet de taille finie qui s'atténuerait ou disparaîtrait lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce n'est pas non plus la conséquence d'une mauvaise performance statistique de l'estimation. Nous avons pu observer le même effet en dimension 2 pour une famille plus réduite de processus puisque nous ne disposons pas d'équivalent en dimension $d \geq 2$ du mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal ou de la marche aléatoire multifractale par exemple. Sur la base de ces observations numériques, nous avons émis la conjecture suivante.

Conjecture.

Pour tout processus multifractal, les estimateurs $\hat{\zeta}(q, n)$ définis plus haut se comportent de la façon suivante lorsque q_^- est bien défini :*

$$\begin{cases} \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow d + h_*^- q, & q \leq q_*^-, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow \zeta(q), & q_*^- \leq q \leq q_*^+, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow d + h_*^+ q, & q_*^+ \leq q. \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

Lorsque q_^- n'est pas défini (estimateurs utilisant simplement les accroissements ou les coefficients d'ondelettes), les estimateurs $\hat{\zeta}(q, n)$ se comportent comme*

$$\begin{cases} \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow \zeta(q), & -1 < q \leq q_*^+, \\ \hat{\zeta}(q, n) \rightarrow d + h_*^+ q, & q_*^+ \leq q. \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

En dimension d , les ordres q_^\pm sont, lorsqu'ils sont bien définis, solution de l'équation :*

$$\zeta(q) - q\zeta'(q) = d. \quad (\text{IV.16})$$

Les équations (IV.14) et (IV.15) signifient que les variables aléatoires $(\hat{\zeta}(q, n) - \zeta(q) - B(q, n))/\sqrt{V(q, n)}$ pour $q \in [q_*^-, q_*^+]$ et $(\hat{\zeta}(q, n) - (d + h_*^\pm q) - B(q, n))/\sqrt{V(q, n)}$ pour $q \notin [q_*^-, q_*^+]$ convergent vers des variables aléatoires de moyenne nulle et de variance unité. Les termes $B(q, n)$ et $V(q, n)$ représentent les biais et variances des $\hat{\zeta}(q, n)$. Leur forme et leur comportement précis dépendent de l'estimateur choisi, du processus étudié et de l'ordre q considéré. Les lois limites peuvent s'écarter de la loi normale de façon significative. Dans la limite des grands n , les $V(q, n)$ décroissent en loi de puissance de n , $V(q, n) \sim \Lambda_q n^{\gamma(q)}$, avec $\gamma(q) \simeq -1$ pour $q \simeq 0$ et $\gamma(q) \simeq -0.1$ pour $q \notin [q_*^-, q_*^+]$, ce qui correspond à une évolution du comportement usuel en n^{-1} vers une décroissance lente en $n^{-0.1}$.

Remarque : nous avons aussi proposé une méthode pour déterminer les valeurs de q_*^- et q_*^+ aussi précisément que possible, voir [127, 129].

2.4 Discussion & conséquences pratiques

L'effet de linéarisation n'avait pas été étudié en détail et a souvent été ignoré par de nombreux travaux consacrés à l'analyse multifractale de données expérimentales issues de domaines variés. Cependant, quelques travaux inspirés par la contribution originelle de

Mandelbrot [139] ont remarqué l'effet de linéarisation sur des données expérimentales [142, 182, 183, 187, 191] et l'on expliqué par des problèmes de convergence des moments ou de taille finie des données. Un autre ensemble de travaux a étudié la question d'un point de vue mathématique pour les cascades binomiales conservatives et l'estimateur basé sur les coefficients d'agrégation [71, 103, 147, 148, 158, 159] ou l'ondelette de Haar [166].

L'argumentaire s'appuyant sur la divergence des moments de la quantité multirésolution utilisée pour l'estimation au-delà d'un ordre critique q_c^+ ne peut pas être satisfaisante puisque l'on peut montrer que $q_c^- \leq q_*^- < 0 < 1 \leq q_*^+ \leq q_c^+$ pour tous les processus considérés ici. Un autre argument souvent proposé considère que les singularités les plus violentes, qui seraient associées à des valeurs négatives du spectre multifractal $D(h)$, ne sont pas vues par l'analyse à cause de la longueur insuffisante des données disponibles. Une stratégie appelée *supersampling* permettrait de voir ces singularités "cachées". Notre étude amène à une conclusion contradictoire avec des argumentaires essentiellement basé sur un raisonnement "avec les mains" ou fondés sur des hypothèses erronées (voir [127, 128] pour une discussion plus détaillée). L'effet de linéarisation est intrinsèquement lié à la structure des signaux (mesures, processus...) analysés. On peut penser qu'il découle en quelque sorte de la validité du formalisme multifractal qui établit la correspondance entre $D(h)$ et $\zeta(q)$ par transformée de Legendre (voir le théorème de Barral & Mandelbrot plus haut).

Par contre, nos observations numériques sont en parfait accord avec les résultats théoriques connus pour les cascades binomiales conservatives. Or les cascades binomiales sont l'archétype sur lequel s'appuient nombre de démonstrations mathématiques pour d'autres processus. Les mathématiciens trouveront certainement peu d'intérêt à la démonstration formelle de la conjecture formulée plus haut car elle serait sans doute essentiellement technique et mathématiquement peu enrichissante. Notre étude numérique est aujourd'hui la caractérisation la plus complète de cet effet de linéarisation. Nous nous attendons à ce que notre conjecture soit très robuste et reste valable pour un large éventail de processus multifractals.

Ce travail est essentiel pour tous ceux qui souhaitent identifier un modèle multifractal pour modéliser des données. Il faut tenir compte du caractère éventuellement trivial de l'information contenue dans les exposants $\zeta(q)$ estimés pour des ordres élevés, potentiellement supérieurs à q_*^+ , ou pour des ordres très négatifs, potentiellement inférieurs à q_*^- . Cette précaution s'est avérée utile pour l'analyse de mesures d'un champ de vitesse turbulent pour lesquelles nous avons montré [127, 130] qu'il était inutile d'estimer des exposants d'ordre supérieur à $q_*^+ \simeq 7, 5$, indépendamment du nombre de Reynolds. Cette conclusion est d'ailleurs cohérente avec les résultats d'analyses de données expérimentales et numériques (voir la thèse de B. Lashermes [127], ou le commentaire sur les travaux de Vincent & Meneguzzi (1991) [207] p.190 de [92] par exemple). La distinction entre modèles log-normal et log-Poisson est dès lors rendue bien délicate. Dans un autre contexte, il a fallu en tenir compte pour la modélisation d'images de Soleil calme par des cascades de Poisson composées intégrées fractionnairement, voir partie V.2.

Remarque : dans un travail très récent, Muzy et ses collaborateurs [151] ont étudié l'analyse multifractale d'une cascade binomiale dans un régime dit "asymptotique mixte" qui semble permettre dans une certaine mesure d'identifier la fonction $\varphi(q)$ d'une cascade

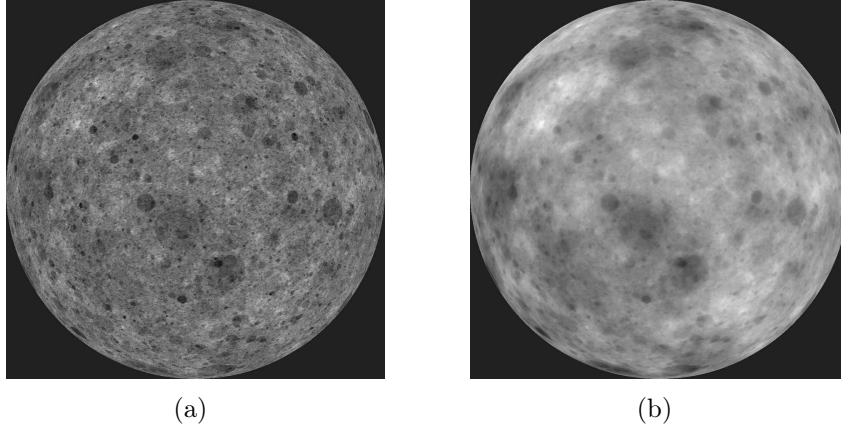


Fig. IV.2: Textures CPC sur la sphère : (a) texture "nue" caractérisé par $\tau(q)$; (b) texture intégrée caractérisée par $\zeta(q) = \tau(q) + qH$

multiplicative en dehors de l'intervalle $[q_*^-, q_*^+]$. L'idée centrale est de modifier l'analyse des lois d'échelle en ne considérant pas la même portion de signal à toutes les échelles.

3 Estimation d'exposants de lois d'échelle sur la sphère

3.1 Motivations

Nous nous tournons maintenant vers une problématique très différente de la précédente et qui touche à l'adaptation d'une méthode d'analyse multifractale sur une surface non plane. Une nouvelle génération d'instruments, en vision et en astrophysique notamment, fournit désormais des données sphériques (omnidirectionnelles). Dans le cadre de la thèse d'Émilie Kœnig, nous avons mené une étude numérique exploratoire sur l'adaptation de l'analyse multifractale à base d'ondelette à la sphère [120]. Les cascades de Poisson composées simulées directement sur la sphère, voir §II.1.7.3, ainsi que leur version fractionnairement pseudo-intégrée grâce aux harmoniques sphériques nous ont servies de processus de référence, voir fig. IV.2. Les résultats de cette étude exploratoire ne sont que partiellement satisfaisants et laissent entrevoir quelques difficultés quant à la transposition immédiate des outils usuels du plan à la sphère. Ce travail a été très instructif quant aux particularités de la sphère et aux outils d'analyse associés. Nous n'évoquons ce travail que de façon très succincte puisqu'il fait partie de la thèse d'Émilie Kœnig.

3.2 Ondelettes sur la sphère

La première difficulté est la prise en main de l'outil ondelette sur la sphère. Différentes constructions ont été proposées dans la littérature, s'appuyant parfois sur des maillages différents [13, 193, 199].

J.-P. Antoine et al. [13] ont construit leur transformée sur une correspondance entre le plan et la sphère grâce à une projection stéréographique. Les opérateurs de translation et de dilatation dans le plan sont remplacés par la rotation et la dilatation stéréographique sur la sphère. La rotation $R(\rho)$, où ρ est un ensemble d'angles d'Euler, et la dilatation D_a sont définis par

$$(R(\rho)f)(\omega) = f(R_\rho^{-1}\omega) . \quad (\text{IV.17})$$

$$(D_af)(\omega) = \lambda(a, \theta)^{1/2} f(D_a^{-1}\omega) . \quad (\text{IV.18})$$

où $f(\omega)$ est une fonction des coordonnées sphériques $\omega = (\theta, \phi)$. La dilatation stéréographique projette préalablement la sphère privée de son pôle Sud sur le plan. Elle impose l'usage d'un maillage équiangulaire. Les deux principaux défauts de ce maillage sont le suréchantillonnage des pôles et l'aire variable des mailles. Ce sont surtout des considérations pratiques et sa simplicité de mise en œuvre qui nous ont amenés à choisir cet outil. La transformée en ondelette sphérique continue $f(\omega)$ est le résultat de la convolution sphérique entre la fonction f et la version tournée-dilatée de l'ondelette mère Ψ

$$W_\Psi^f(\rho, a) = \langle \Psi_{a,\rho} | f \rangle = \int_{S^2} d\mu(\omega) [\overline{R_\rho D_a \Psi}](\omega) f(\omega) . \quad (\text{IV.19})$$

Cette transformée est implémentée dans la boîte à outil Matlab YAWTb (Yet Another Wavelet Toolbox, <http://rhea.tele.ucl.ac.be/yawtb/>) développée par L. Jacques et ses collaborateurs en 2002 [111].

3.3 Analyse multifractale en ondelette sur la sphère

Nous avons étudié l'adaptation (presque) directe et naïve de l'analyse multifractale habituelle dans le plan en remplaçant les coefficients $T_f(j, k)$ par $W_\Psi^f(\rho, a)$ dans (IV.7) pour une suite discrète d'échelles tangentielles $a_j = 2 \tan((\pi/4)2^{-j})$, $1 \leq j \leq J$. Nous avons ainsi arbitrairement discrétisé les échelles utilisées pour l'estimation des exposants de lois d'échelle.

Les coefficients fournis par la transformée en ondelette sont normalisés L^2 tandis qu'une normalisation L^1 est nécessaire pour l'analyse multifractale. Nous avons par conséquent implémenté l'ondelette chapeau mexicain sphérique L^1 dans YAWTb.

Notre étude a consisté à étudier le comportement des estimateurs $\hat{\tau}(q)$ et $\hat{\zeta}(q)$ à partir d'un grand nombre de simulations de textures multifractales sur la sphère, voir fig. IV.2. Afin de nous assurer que les textures synthétisées avaient bien les propriétés désirées, nous avons d'abord validé les résultats d'une analyse basée sur les coefficients d'agrégation, voir fig. IV.3(a). Nous nous sommes ensuite intéressés aux estimations ondelette, fig. IV.3(b)&(c). Si l'allure générale et les ordres de grandeur des fonctions $\hat{\tau}_{swt}(q)$ et $\hat{\zeta}_{swt}(q)$ estimées sont correctes, nous avons systématiquement observé un biais que ne présente pas l'estimation basée sur les coefficients d'agrégation $\hat{\tau}_{box}(q)$, fig. IV.3(a). On obtient typiquement une sous-estimation de $\tau(q)$ par $\hat{\tau}_{swt}(q)$. Nous n'avons pas pu identifier l'origine de ce biais systématique.

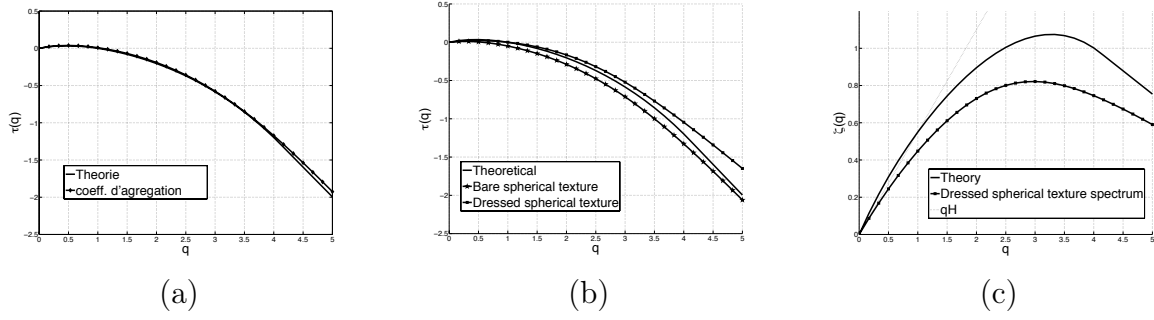


Fig. IV.3: (a) Estimés $\hat{\tau}_{box}(q)$ pour les textures CPC (a) par coefficients d'agrégation (b) par transformée en ondelettes sphérique (SWT) $\hat{\tau}_{swt}(q)$; (c) Analyse multifractale de la texture intégrée fractionnaire, $\zeta(q)$ de la forme $qH + \tau(q)$.

3.4 Conclusion

Cette étude préliminaire n'a pas abouti à un résultat positif, mais s'est avérée très instructive puisqu'elle nous a confronté aux problèmes très spécifiques que pose l'analyse sur la sphère. Nous savons néanmoins que l'adaptation de l'analyse multifractale en ondelette sur la sphère n'est pas immédiate et nécessitera quelques efforts et précautions. Le choix de la transformée n'est certainement pas anodin. La méthode de simulation des processus est aussi sujette à caution. Au moment où nous avons effectué ce travail, la transformée en ondelettes discrète de Wiaux et ses collaborateurs [214] publiée très récemment n'existait pas encore...De nouvelles perspectives nous attendent.

V. Modélisation d'images naturelles

Les motivations pour développer les constructions de processus invariants d'échelle ainsi que les outils d'analyse des propriétés d'invariance d'échelle viennent des applications. La description et la compréhension des données expérimentales issues des écoulements de turbulence pleinement développée fournissent la première motivation. L'accès à des modèles (scalaires) invariant d'échelle en dimension $d \geq 2$ ouvre la porte vers d'autres applications. Nous nous sommes en particulier intéressés à la modélisation d'images.

La première partie de ce chapitre est consacrée à un travail de fond sur la modélisation statistique des images naturelles en général. Nous montrons que les cascades infiniment divisibles (CID) rassemblent pratiquement toutes les “bonnes propriétés” qu'un modèle pour les images naturelles doit avoir. À cette fin, nous passons en revue quelques modèles de référence pour les comparer aux CID. Nous présentons aussi les résultats d'une étude expérimentale sur un ensemble d'images naturelles issues de la base de van Hateren [107]. Les CID sont certainement un bon cadre de réflexion pour développer de nouveaux outils pour la modélisation et le traitement d'image. Ce travail a été publié dans *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* entre autres [55, 57, 60].

La deuxième partie présente le résultat d'une collaboration avec Véronique Delouille et Jean-François Hochedez de l'équipe de Physique Solaire de l'Observatoire Royal de Belgique à Bruxelles. L'objectif principal est de trouver un moyen de prédire autant que possible la qualité d'observations futures du Soleil à très haute résolution à partir d'observations actuelles issues du télescope spatial E.I.T. embarqué par la mission SoHO. Les zones dites de “Soleil calme” ont en effet un aspect désordonné, semblable à une texture. Nous présentons les résultats d'une première étape d'analyse de données qui a permis de montrer en bonne approximation le caractère multifractal des images de Soleil calme. Ensuite, nous montrons que les résultats de cette analyse peuvent être exploités pour procéder à une extrapolation stochastique grâce à une augmentation virtuelle de résolution des images basse résolution pour obtenir des réalisations cohérentes d'images à haute résolution. Ce travail est publié [58, 76] ou en voie de publication [121, 122].

1 Les CID, un modèle statistique pour les images naturelles

1.1 La modélisation statistique des images naturelles

Les images naturelles dont nous parlons ici sont des images en niveaux de gris issues du monde réel : un paysage rural ou urbain, un arbre ou une forêt, la mer, la foule... La modélisation générique des images naturelles [173, 195, 197] s'avère très utile pour l'élabo-

ration et l'optimisation de méthodes de traitement d'image (débruitage, inpainting, suivi, reconnaissance des formes...). Une autre motivation de l'étude statistique des images naturelles est la compréhension du système visuel animal. Les systèmes efficaces tirent parti de la structure de leurs signaux d'entrée pour les débruiter et les représenter de façon condensée. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent article de revue de Srivastava et ses collaborateurs [197] pour un panorama complet.

Une image sera ici vue comme une réalisation d'un processus aléatoire défini sur un domaine de \mathbb{R}^2 . L'objectif d'une modélisation est de reproduire les caractéristiques essentielles communes aux images naturelles dans leur ensemble. Un tel modèle n'a en général pas la prétention de produire des images réalistes à partir d'une réalisation sans information a priori. Ces modèles fournissent aussi souvent d'intéressantes méthodes de synthèse de texture. C'est le cas des CID, mais nous avons choisi de ne pas aborder cet aspect ici.

Le cadre étant posé, revenons sur quelques hypothèses classiques des modèles statistiques pour les images naturelles. Malgré l'anisotropie du monde réel due à l'existence de la gravitation qui induit une distinction permanente entre le ciel et le sol, les modèles sont généralement initialement homogènes et isotropes. Cette simplification n'est en réalité pas très limitante, et ne suffit pas à rendre le problème simple. Il sera toujours temps d'introduire un peu d'inhomogénéité ou d'anisotropie dans un modèle qui possède les degrés de liberté adéquats. Il est couramment reconnu [197] que le spectre des images naturelles est en loi de puissance de la forme $S(k) \propto 1/k^{2-\eta}$, ce qui est une signature de l'invariance d'échelle. Une valeur $\eta = 0.19$ a par exemple été observée par Ruderman & Bialek [175]. Il est aussi connu que les distributions sont non gaussiennes. Des distributions très piquées avec des queues lourdes ont été décrites dans de nombreux travaux expérimentaux [197]. Au-delà des statistiques du second ordre suffisantes pour décrire un processus gaussien, nous devons faire appel à des statistiques d'ordre supérieur, notamment grâce à l'analyse multifractale. Les difficultés de la modélisation des images naturelles proviennent de leur caractère à la fois invariant d'échelle et non gaussien. Un modèle tel que le drap brownien fractionnaire [22, 43] n'est pas satisfaisant.

Cette problématique qui combine invariance d'échelle et non-gaussianité est proche de celle rencontrée en turbulence pour rendre compte du phénomène d'intermittence (voir §I.3). Cette analogie entre la turbulence et les images naturelles a été remarquée par divers auteurs [173, 201]. Turiel et ses collaborateurs [201, 202] ont par exemple proposé une analyse multifractale des images naturelles en s'appuyant sur la propriété d'autosimilarité étendue (la fameuse *ESS*, voir §IV.1.1 p.74). Ainsi, il apparaît que les modèles multifractals sont de bons candidats à la modélisation des images naturelles. Une telle approche peut apporter un cadre de réflexion intéressant soutenu par une culture acquise dans la durée par la communauté de la turbulence. Nous verrons que la communauté "images naturelles" a d'ailleurs suivi une trajectoire quasi-parallèle pour aboutir à des propositions similaires. Notre propos est de montrer que précisément, les cascades infiniment divisibles (CID) ont un bon potentiel pour la modélisation des images naturelles et offrent un cadre de travail cohérent pour comprendre les liens entre des observations qui peuvent paraître déconnectées de prime abord.

1.2 Quelques bonnes propriétés des CID

Les CID était l'objet de la partie II.1 où les principales définitions et propriétés sont énoncées. Nous complétons notre propos en nous intéressant ici à certaines propriétés des CID considérées dans le contexte "images naturelles".

Pour mémoire, rappelons que les CID correspondent à la densité d'une mesure, autrement dit ce sont des processus positifs, ce qui n'est pas en contradiction avec la nature physique (un comptage de photons) de l'intensité d'un pixel dans une image. Les CID sont invariantes d'échelles et possèdent en dimension 2 un spectre en loi de puissance de la forme $S(k) \sim 1/k^{2+\tau(2)}$ où $\tau(2) \leq 0$, ce qui est cohérent avec le spectre en $1/k^{2-\eta}$ des images naturelles évoqué plus haut. Nous verrons dans la partie V.1.4 d'autres propriétés communes aux CID et aux images naturelles.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à deux aspects importants qui viennent renforcer la pertinence a priori des CID dans ce contexte : l'interprétation physique des cascades Poisson composées (CPC) en dimension 2 et la nature des statistiques multivariées des coefficients d'ondelettes des CID 2D.

1.2.1 Interprétation physique des CPC

Au sein de la famille des CID, les cascades Poisson composées (CPC) sont les plus confortables à utiliser pour les applications, d'une part grâce à la simplicité de leur simulation en dimension $d \geq 1$, d'autre part grâce à l'interprétation physique que l'on peut en donner. En effet, en prenant le logarithme de la définition des CPC (II.9) (p. 36) nous obtenons :

$$\log Q_\ell(\mathbf{x}) = \sum_i \log W_i \cdot f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{r_i}\right) + K. \quad (\text{V.1})$$

Ainsi, le processus $Q_\ell(\mathbf{x})$ peut être vu comme l'intensité $I(\mathbf{x})$ résultant de la transmission de la lumière issue d'une source homogène par une superposition aléatoire d'objets (par ex. des cylindres) transparents de tailles aléatoires r_i placés aux positions aléatoires \mathbf{x}_i et de transparences aléatoire W_i . Cette interprétation très simple met en évidence des ressemblances entre les CPC et d'autres approches classiques proposant de construire des modèles d'images naturelles comme la superposition d'objets élémentaires distribués de façon aléatoire [67, 132, 197]. Remarquons que, contrairement au modèle des feuilles mortes de Matheron [144], aucun phénomène d'occlusion n'est pris en compte.

Cette interprétation peut aussi être mise en correspondance avec la phénoménologie proposée par Geusebroek [95, 96]. Dans cette dernière, la lumière incidente sur un capteur optique (l'œil, un CCD...) est décrite comme le résultat d'une série de réflexions et diffractions par des objets dans un espace 3D éclairé par une source. L'intensité mesurée $I(\mathbf{x})$ devrait par conséquent être modélisée comme le produit de l'intensité de la source et du produit d'un nombre aléatoire de facteurs de réflexion/atténuation à différentes échelles allant de la taille des objets jusqu'à l'échelle de leur rugosité éventuelle. Cette phénoménologie -qui reste une phénoménologie- mène naturellement aux cascades multiplicatives. Geusebroek pointe même implicitement l'intérêt des lois d'échelle infiniment divisible du

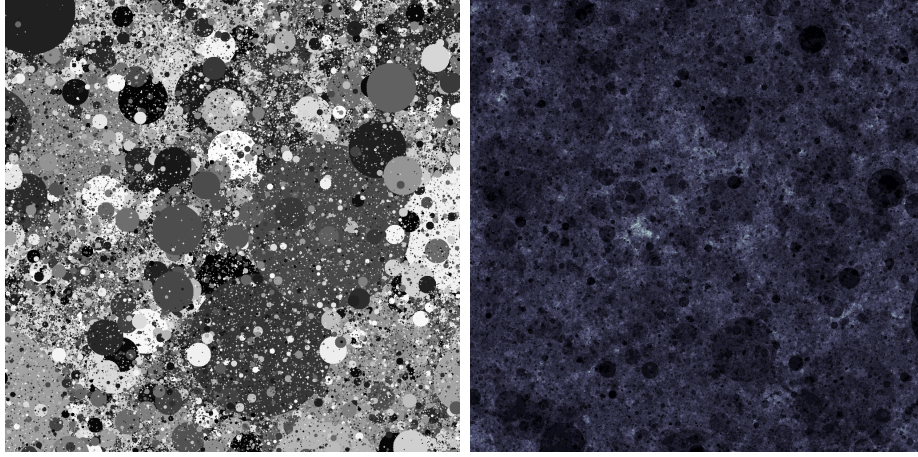


Fig. V.1: Exemple de réalisation du modèle des feuilles mortes [11] (motif = disque) pour une répartition en $1/r^\alpha$ des tailles des compacts (α proche de 3) comparée à une réalisation de CID.

§I.3 à travers une référence au travail de Castaing & Dubrulle (1995) [50]. Malgré la sympathie que peut susciter chez nous les conclusions auxquelles elle mène, la phénoménologie proposée par Geusebroek n'est pas très convaincante.

L'approche proposée par Alvarez, Gousseau & Morel [11] approfondie ensuite par Gousseau & Roueff [99] faisant appel au modèle des feuilles mortes de Matheron nous paraît beaucoup plus digne d'intérêt. En bref, le modèle des feuilles mortes construit une image en superposant aléatoirement des compacts de taille aléatoire. Chaque nouveau compact agit comme une feuille morte se déposant sur le sol et occulte les points qu'il recouvre. La figure V.1 présente un exemple de réalisation de ce modèle comparée à une réalisation de CID. On montre que, pour reproduire les propriétés statistiques des images, la distribution des tailles des compacts doit être en $1/r^\alpha$ avec $1 < \alpha < 3$, la valeur $\alpha = 3$ jouant un rôle critique dans la limite des résolutions infiniment fines. Le modèle des feuilles mortes partage de nombreux ingrédients avec les CID. Dans les deux cas, il s'agit d'une superposition aléatoire en espace d'objets de taille aléatoire distribuée en $1/r^\alpha$. La différence essentielle entre les deux modèles se trouve dans l'occlusion totale du fond par chaque nouvel objet (de couleur aléatoire) dans le modèle des feuilles mortes tandis que les objets intervenant dans la construction des CID sont tous transparents (de transparence aléatoire). D'un point de vue physique, il pourrait être intéressant de disposer d'une approche capable de prendre en compte les deux phénomènes, occlusion et transparence.

1.2.2 Statistiques multivariées

Au-delà du comportement non gaussien des statistiques marginales, les CID ont des statistiques multivariées particulières. La figure V.2 montre les histogrammes joints et conditionnels des coefficients d'ondelettes d'une CID. Ces observations sont similaires à celles de Wainwright & Simoncelli (voir fig. 4 de [208] ou fig. 1 de [197]) sur des images

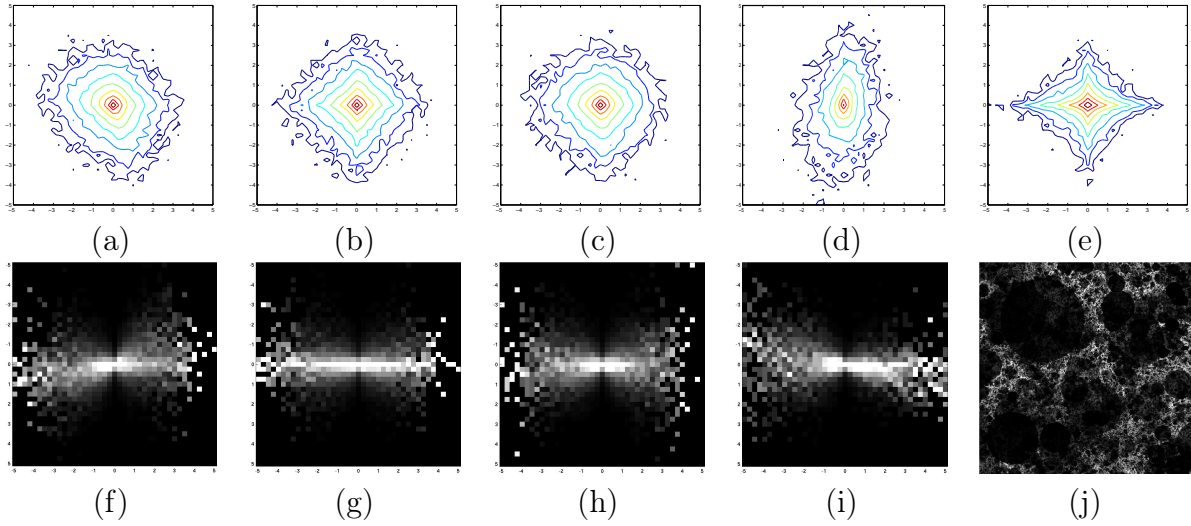


Fig. V.2: Histogrammes bivariés de deux coefficients d'ondelettes associés à différentes positions, échelles et orientations d'une image CPC (à comparer avec Wainwright & Simoncelli [208]). La ligne du haut représente les isocontours de la log probabilité conjointe : (a)&(b) pour différentes positions (mêmes échelle et orientation), (c) pour différentes orientations (même échelle et presque même position), (d) correspond à une paire d'échelles adjacentes (même orientation et presque même position), (e) voisins éloignés à la même échelle. La ligne du bas représente des histogrammes conditionnels : le blanc correspond à une fréquence élevée. La figure (j) est l'image CPC elle-même.

naturelles. Ces résultats peuvent aussi être comparés aux formes polyédrales irrégulières observées par Lee *et al.* [132] dans les isocontours des histogrammes issus d'un modèle d'occlusion. De telles propriétés sont habituellement attribuées à la présence de formes géométriques simples d'intensité quasi-constante avec des discontinuités abruptes.

Ces observations sont parfaitement cohérentes avec une structure de cascade multiplicative sous-jacente, ce que nous illustrons par l'argument suivant. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires telles que deux coefficients d'ondelettes à des positions / échelles / orientations différentes par exemple. Supposons qu'il existe une variable aléatoire z indépendante de X_1 et de X_2 telle que $X_2 \stackrel{d}{=} z \cdot X_1$. Soit p_z la fonction densité de distribution de z . La densité de X_2 conditionné à X_1 est alors telle que $p(X_2|X_1) = p(zX_1|X_1) = \frac{1}{|X_1|} p_z(z) = \frac{1}{|X_1|} p_z(\frac{X_2}{X_1})$. Par conséquent, on s'attend à ce que la largeur de $p(X_2|X_1)$ croisse linéairement avec $|X_1|$, ce qui produit cette forme en papillon que l'on peut observer sur les figures V.2(f-i).

1.3 Quelques modèles revisités à travers les CID

1.3.1 Mumford & Gidas

Les CID ont beaucoup de points communs avec l'approche de Mumford & Gidas (2001) [149], un travail qui fait référence dans le domaine. Notons au passage que les premiers travaux sur la définition des CID datent à peu près de la même époque dans des communautés jusque-là bien distinctes.

En suivant une approche axiomatique assez théorique, Mumford & Gidas parviennent à la conclusion qu'un modèle pertinent pour les images naturelles doit être non gaussien, invariant d'échelle et impliquer des distributions infiniment divisibles. Ils soulignent aussi l'importance d'une distribution des échelles en $1/r^3$, exactement comme la mesure de contrôle d'une CID 2D, voir (II.26) p.40. Cette loi en $1/r^3$ se retrouve aussi dans le modèle des feuilles mortes [99, 132, 144, 174].

Ces hypothèses ont des conséquences sur les distributions et les fonctions de corrélation. Par exemple, une propriété importante des images naturelles est que la covariance $C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ de l'intensité I ($\equiv Q_\ell$) obéit à une loi de puissance $C_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \propto |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-\beta}$. Il s'agit d'une conséquence dans l'espace direct du spectre en loi de puissance dans l'espace de Fourier. Les CID vérifient cette propriété, voir (II.28) §II.1.4. Une autre propriété, typique des images naturelles et des constructions multiplicatives, est le comportement de la covariance $C_{\log I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ du logarithme de l'intensité $\log I$ qui se comporte comme $\log \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$, voir (II.29). Mumford & Gidas partent de cette propriété pour modéliser l'intensité I au lieu de $\log I$. Pour une cascade multiplicative, la quantité $\log \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$ correspond au nombre moyen d'ancêtres communs aux valeurs à deux positions différentes, $I(\mathbf{x}_1) \equiv Q_\ell(\mathbf{x}_1)$ and $I(\mathbf{x}_2) \equiv Q_\ell(\mathbf{x}_2)$.

Le modèle de Mumford & Gidas pour l'intensité I est similaire à un modèle additif de type log-IDC que nous proposons pour modéliser $\log I$ plutôt que I . Nous proposons d'utiliser un modèle multiplicatif pour l'intensité I et un modèle additif pour son logarithme $\log I$, le tout dans le cadre cohérent des CID. Les travaux antérieurs se sont souvent intéressés séparément soit à I soit à $\log I$ seulement. Le cadre des CID permet d'explicitement les relations entre les propriétés observées sur I et $\log I$. À notre connaissance, aucune autre approche ne propose de considérer I et $\log I$ de façon cohérente.

Enfin, la notion de "désordre" (*clutter*) dans les images naturelles reçoit une définition relativement précise dans [149] grâce à l'utilisation de distributions infiniment divisibles, toujours avec cette idée que les systèmes multiéchelles sont nécessairement "subdivisibles". La définition des CID fait précisément intervenir un paramètre quantifiant le "désordre" de façon quantitative ; c'est $\log(1/\ell)$ (ℓ est la résolution de la CID) qui correspond au nombre moyen de multiplicateurs W_i utilisés pour définir $Q_\ell(\mathbf{x})$. Plus ℓ est petite, plus la gamme d'échelle impliquée est grande, donc plus le "désordre" est grand. La quantité $\log(1/\ell)$ est habituellement appelée *profondeur de la cascade*.

1.3.2 Modèle du générateur transporté : formes Bessel K

Décrites sous la forme (V.1), les CPC paraissent très similaires au modèle du générateur transporté ou *Transported Generator Models* (TGM) proposé par Grenander & Srivastava (2001,2002) [101, 198]. Ces auteurs ont montré qu'une distribution bien choisie d'objets aléatoires translatés et dilatés (les générateurs) permettait de décrire les variations d'un grand nombre de scènes en ajustant peu de paramètres. Leur raisonnement les a amenés à proposer les modèles appelés *formes Bessel-K*.

Nous rappelons brièvement les principaux ingrédients du TGM tel qu'il est décrit dans [198]. Ce modèle suppose que :

1. les a_i sont des variables normales i.i.d. standard,
2. les échelles ρ_i sont indépendantes et identiquement distribuées sur l'intervalle $[0, L]$,
3. les positions \mathbf{x}_i sont les échantillons d'un processus de Poisson ponctuel 2D homogène d'intensité $\lambda > 0$,
4. les a_i , g_i , x_i et ρ_i s sont indépendants les uns des autres.

La formation de l'image est alors modélisée par :

$$I(\mathbf{x}) = \sum_i^n a_i g_i \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\rho_i} \right). \quad (\text{V.2})$$

Chaque objet de générateur $g_i(\mathbf{x})$ dans la scène contribue à la valeur du pixel $I(\mathbf{x})$ à hauteur de $a_i g_i(\frac{1}{\rho_i}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i))$. Ici, \mathbf{x} est la position d'un pixel dans $\mathcal{T} \equiv [0, L] \times [0, L]$, $g_i : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^+$ est le générateur d'un objet choisi aléatoirement, $\rho_i \in [0, L]$ est une échelle aléatoire, et a_i est un poids aléatoire associé à g_i . En bref, il s'agit d'une combinaison linéaire aléatoire d'un nombre aléatoire n d'objets aléatoires g_i .

Le but de cet approche est de déduire de (V.2) des modèles de distributions en intégrant implicitement la variabilité des différents ingrédients. Srivastava *et al.* [198] se sont intéressés en particulier à la distribution des gradients de l'image $\partial I / \partial x$ ou de versions filtrées de l'image $I^{(j)}(\mathbf{x}) = F^{(j)} * I(\mathbf{x})$ où $F^{(j)}$ est un filtrage passe-bande (ex : Gabor). Sous quelques hypothèses, des calculs explicites mènent à une expression analytique de la distribution des gradients en termes d'une *forme Bessel K*. Les distributions multivariées sont aussi obtenues, et les résultats sont étendus aux intensités filtrées $I^{(j)}$ dans [198]. L'intérêt des formes Bessel K provient de leur faible nombre de paramètres puisqu'elles dépendent seulement de 2 paramètres qui peuvent être estimés sur chaque image. Elles peuvent être utilisées pour la classification, la reconnaissance de cible ou la synthèse de texture.

Malgré des origines différentes, les TGM (modèles additifs) et les CPC (modèles multiplicatifs) ont de nombreux points communs. Comparons (V.2) et (V.1). Appliqué à une version filtrée $I^{(j)}$ à la place de $\log I(\mathbf{x})$, le TGM ressemble beaucoup à $\log Q_\ell(\mathbf{x})$ issu d'une CPC avec des multiplicateurs W_i log-normaux (les $\log W_i \equiv a_i$ sont alors des variables normales i.i.d.), une distribution uniforme pour les échelles $r_i \equiv \rho_i$ au lieu de la loi en $1/r^3$ habituelle –voir eq. (II.26)– et un noyau d'intégration (le générateur) $f(\mathbf{x}) \equiv g_i(\mathbf{x})$. Nous identifions ici I à Q_ℓ et son logarithme $\log I$ à $\log Q_\ell$. Une différence fondamentale

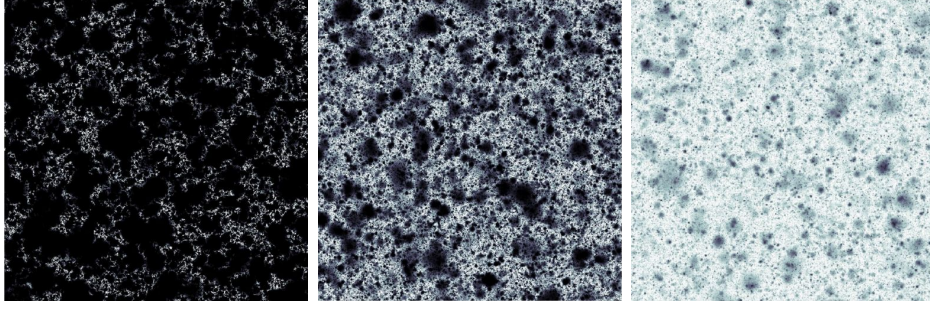


Fig. V.3: Exemples de cascades Poisson composées issues de formes Bessel I de paramètres $\lambda = 0.1, 1.0$ et 10 (de g. à dr.).

entre le TGM et les CPC vient des quantités modélisées : le TGM modélise les gradients de l'image $\partial I / \partial x$ ou des version filtrées passe-bande $I^{(j)}$ tandis que les CPC modélisent directement $\log I$ et I .

Pour les deux familles de modèles, TGM et CPC, les distributions marginales ne sont pas accessibles analytiquement dans le cas le plus général à cause du terme non constant $g_i(\mathbf{x})$ ou $f(\mathbf{x})$. C'est la raison pour laquelle Grenander & Srivastava [101] ont proposé un modèle empirique utilisant un mélange d'échelles gaussien de lois Γ qui mène aux lois Bessel K qui sont infiniment divisibles (mais pas Poisson composées). Remarquons cependant que le modèle TGM ne prend pas en compte la propriété d'invariance d'échelle.

Enfin, Grenander & Srivastava [101] donnent une liste de généralisations possibles de leur approche pour intégrer des propriétés telles que inhomogénéité, anisotropie locale, contrôle de la régularité, écarts contrôlés à la gaussienne... Les CID, grâce à leurs nombreux degrés de liberté, sont a priori une très bonne porte d'entrée vers ces généralisations et pourraient permettre une adaptation à une grande variété d'images. C'est un champ de recherche à explorer.

Remarque : dans [57] nous avons aussi proposé un modèle cousin des formes Bessel K, les formes Bessel I inspirées par le modèle de température de la turbulence proposé par Castaing [48]. Les formes Bessel I sont de plus très simples à simuler, voir figure V.3.

1.3.3 Modèles additifs multiéchelle

Le modèle TGM et les CPC partagent aussi quelques similitudes avec des modèles additifs inspirés par l'analyse multirésolution. On peut notamment citer les cascades multiplicatives sur les coefficients d'ondelettes [18, 38, 209] qui consistent à définir un processus stochastique invariant d'échelle en construisant ses coefficients d'ondelette à l'aide d'une cascade multiplicative. On peut par exemple utiliser une mesure multifractale μ pour déterminer les coefficients. L'analyse multifractale mathématique de ce type de modèle est

proposée dans [35]. Une définition possible de ces processus est en dimension 1 :

$$X(x) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \sum_{b=0}^{b^j-1} \mu([kb^{-j}, (k+1)b^{-j}]) \psi_{j,k}(x) \quad (\text{V.3})$$

où $\psi_{j,k}$ est une version dilatée et translatée d'une fonction ψ qui pourra être une ondelette, une impulsion ou une fonction linéaire par morceau ; la mesure μ est une mesure aléatoire multifractale typiquement issue d'une cascade multiplicative b -adique où b est un entier ≥ 2 . Ces constructions mènent effectivement à des processus multifractals dont les propriétés sont assez bien connues. Un inconvénient majeur de ces modèles vient de la grille dyadique sous-jacente à leur définition. L'invariance d'échelle obtenue ne peut être que discrète : le résultat gardera toujours la mémoire de la structure dyadique utilisée. L'avantage est que l'on dispose d'une construction additive, ce qui permet la conception d'outils d'analyse et de traitement. Ce type de modèle est utilisé avec succès par Wainwright, Simoncelli & Willsky (2001) pour développer une technique de débruitage d'images. Nous y revenons sous l'angle des mélanges d'échelles gaussiens dans le paragraphe 1.3.4.

Dans une approche plus orientée vers la synthèse de texture, inspirée par la définition d'une base d'ondelette adaptée à la construction du fBm [7, 36, 146], Deguy & Benassi (2001) [75] ont proposé le modèle *tdMAP* (Tree Driven Map). Les coefficients d'ondelette sont alors issus d'un bruit blanc gaussien $\xi_{j,k,u}$ en dimension d :

$$X(x) = \sum_{j,k \in \mathcal{T}} 2^{-jH} \sum_{u=1}^{2^d-1} \xi_{j,k,u} \psi_u(2^j x - k), \quad (\text{V.4})$$

où \mathcal{T} est l'arbre de la décomposition en ondelettes, j une octave, k la localisation spatiale, et ψ_u les ondelettes de la décomposition en dimension d ($2^d - 1$ ondelettes en dimension d). Ce modèle a lui aussi l'inconvénient de s'appuyer sur un arbre dyadique sous-jacent, d'où une invariance d'échelle discrète seulement. Il peut être comparé aux séries aléatoires d'ondelettes de Aubry & Jaffard (2002) [20, 127] qui sont construites en affectant des valeurs indépendantes et identiquement distribuées aux coefficients d'ondelettes à chaque échelle et en imposant une décroissance de leur amplitude dans la limite des petites échelles. On peut aussi remplacer ψ_u par un motif autre qu'une ondelette pour obtenir un outil de synthèse de texture très efficace. Il est utilisé par la société *Allegorithmic* dirigée par S. Deguy qui travaille pour les jeux vidéo notamment.

1.3.4 Mélanges d'échelles gaussiens (Gaussian Scale Mixtures)

Nous commentons ici le lien entre les CID et les mélanges d'échelle gaussiens ou *Gaussian scale mixtures* proposés dans la littérature pour modéliser la statistique des images naturelles [208, 209]. Ce lien est relativement simple à mettre en évidence sur la base des propriétés des lois d'échelle infiniment divisibles décrites au paragraphe I.3 p.26 dont nous procédons ici à un bref rappel.

Les moyennes par boîtes de l'intensité $I \equiv Q_\ell$ sont définies par (IV.6) p.75 comme

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)|} \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)} I \quad (\text{V.5})$$

où $|\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)|$ est le volume de la boule $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)$ de rayon r centrée en \mathbf{x} , ici la surface du disque de rayon r . Soit P_r la famille de distributions indexée par l'échelle $\ell \leq r \leq L$ associée à $Y_r = \ln \varepsilon_r$. Nous avons vu au §II.1.6.2 p.45 que les CID $Q_\ell \equiv I$ obéissent à des lois d'échelle infiniment divisibles de sorte qu'il existe une distribution G , celle qui a servi à construire la CID, et une fonction décroissante $n(r) = m(\mathcal{C}_r)$ telles que, pour tout $\ell \leq r_2 \leq r_1 \leq L$,

$$P_{r_2} = G^{*[n(r_2)-n(r_1)]} * P_{r_1} = G_{r_1, r_2} * P_{r_1}. \quad (\text{V.6})$$

La relation de convolution (V.6) se traduit par l'égalité en loi :

$$\varepsilon_{r_2}(\mathbf{x}_2) \stackrel{d}{=} W_{r_1, r_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \varepsilon_{r_1}(\mathbf{x}_1) \quad (\text{V.7})$$

où W_{r_1, r_2} est une variable aléatoire indépendante de $\varepsilon_{r_1}(\mathbf{x}_1)$ et $\varepsilon_{r_2}(\mathbf{x}_2)$ distribuée par la loi G_{r_1, r_2} . C'est précisément la définition d'un mélange d'échelles général pour ε_r . Il s'agirait d'un mélange gaussien si ε_{r_1} était une variable normale centrée.

Remarque : soit I_r l'intensité de l'image observée à la résolution r , on peut voir I_r comme une version filtrée passe-bas d'une scène $I(\mathbf{x})$ ($I_r \equiv \varepsilon_r$). Grâce aux observations du §I.3.4, la relation (V.6) nous indique aussi qu'une équation de diffusion de type Fokker-Planck permet de décrire l'évolution des distributions P_r de $Y = \log I_r$ et donc un lien entre les images d'une même scène vue à des résolutions r de plus en plus fines.

Dans la littérature, les mélanges d'échelles gaussiens ont surtout été proposés pour décrire les distributions des coefficients d'ondelettes à l'échelle r . Les études expérimentales montrent que plus l'échelle considérée est petite, plus ces distributions s'éloignent de la loi normale. Nous retrouvons le fameux phénomène d'intermittence déjà rencontré en turbulence. Cette propriété d'évolution des distributions de gaussiennes à grande échelle à fortement non gaussiennes aux petites échelles est très bien reproduite par les CID, voir figure II.8 p.45. Les modèles utilisant un mélange d'échelles gaussiens proposent de modéliser cette évolution par une relation telle que (V.6) appliquée aux coefficients d'ondelettes. Comme il est en général raisonnable de supposer que les coefficients à grande échelle sont gaussiens, les distributions des coefficients aux échelles inférieures doivent être bien décrites par un mélange d'échelles gaussien (GSM) [195, 197, 208, 209].

En vue de la description complète d'une image donnée selon une approche multirésolution, la relation (V.6) nous indique que la reproduction des marginales des coefficients d'ondelettes est une condition nécessaire mais insuffisante [88]. Dans le but de reproduire des textures, Heeger & Bergen (1995) [108] ont proposé un schéma itératif très simple d'adaptation successive des histogrammes des coefficients d'ondelettes et de l'histogramme de l'intensité elle-même. Cette approche revient en quelque sorte à résoudre implicitement (V.6). Wei & Levoy (2000) [210] et Gallagher & Kokaram (2005) [94] ont aussi proposé des méthodes capables de reproduire mécaniquement la structure locale d'une texture à différentes résolutions. Dans un cadre plus formel et aussi en s'appuyant sur une modélisation plus explicite, Wainwright, Simoncelli & Willsky (2001) [208, 209] ont utilisé les mélanges d'échelles gaussiens pour modéliser les corrélations entre échelles par une cascade multiplicative (avec des multiplicateurs cachés) sur les coefficients d'ondelettes. Cette approche capture explicitement beaucoup d'information, ce qui assez satisfaisant intellectuellement, d'autant plus que cela nous rappelle les cascades multiplicatives

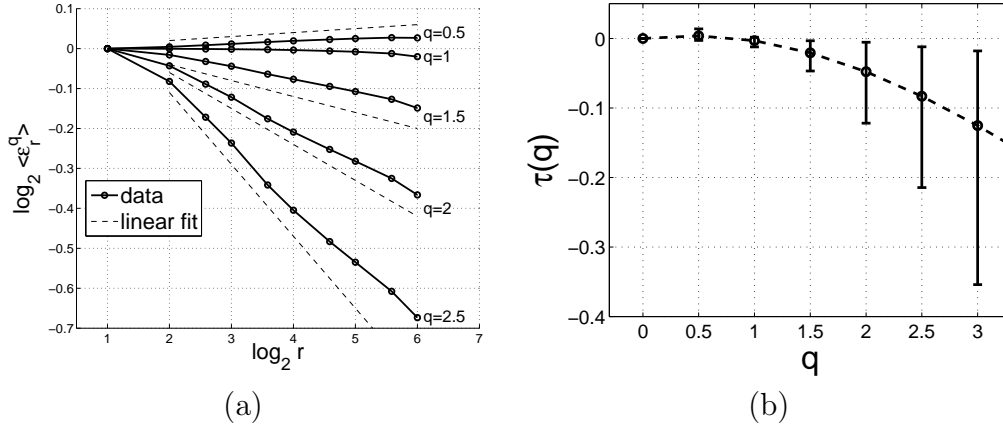


Fig. V.4: Analyse multifractale d'un ensemble de 400 images de la base de van Hateren. (a) Comportement en $\mathbb{E}\varepsilon_r^q \propto r^{\tau(q)}$ sur 5 octaves environ pour une image seule. (b) les exposants estimés $\tau(q)$ ont un comportement non linéaire; les barres d'erreur sont des intervalles de confiance empiriques à 95%.

sur coefficients d'ondelettes introduites par Arneodo, Bacry & Muzy (1998) [18] en turbulence. Cependant, il semble que les approches purement algorithmiques, telles que les “champs d'experts” (fields of experts) [172] basés sur les champs de Markov aléatoires, soient souvent au moins aussi efficaces pour les applications.

1.4 Étude expérimentale

Afin de confirmer les arguments théoriques développés jusqu'ici, nous avons procédé à une étude expérimentale sur une base de 400 images naturelles issues de la base de van Hateren [107]. Toutes les propriétés évoquées (invariance d'échelle, non gaussianité, spectres, formes des corrélations, histogrammes joints...) ont pu être mises en évidence. Nous revenons ici en particulier sur deux observations qui nous ont parues particulièrement intéressantes : les résultats d'une analyse multifractale simple et la comparaison avec l'analyse de Ruderman & Bialek [175].

1.4.1 Analyse multifractale de l'intensité

La figure V.4 présente les résultats de l'analyse multifractale des images de la base de van Hateren. Le caractère particulièrement singulier des images naturelles les rend semblable à des densités de distributions, de sorte que l'analyse multifractale ne peut être menée qu'en utilisant soit les moyennes par boîte, soit un estimateur ondelette précédé d'une étape d'intégration, soit une technique combinée telle que celle proposée récemment dans la thèse de H. Wendt (2008) [211]. Pour des raisons de simplicité de présentation du travail dans la communauté “image” peu familière avec l'analyse multifractale, nous avons préféré utiliser les moyennes par boîtes. La figure V.4(a) vérifie la pertinence d'une telle analyse en illustrant la validité de l'invariance d'échelle (diagrammes log-log). Un

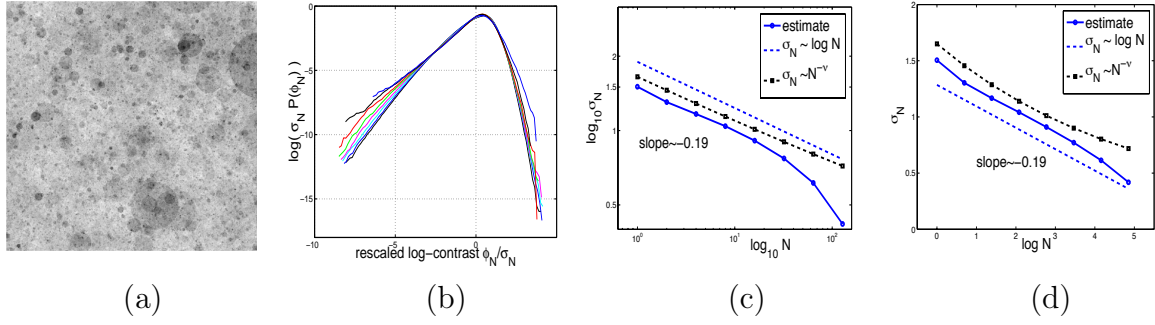


Fig. V.5: (a) exemple de réalisation d'une CID, (b) illustration de l'auto-similarité des histogrammes de ϕ_N aux échelles $N = 2^j$ pour $0 \leq j \leq 7$ (de $N = 1$ à 128), (c) représentation log-log de σ_N en fonction de N , (d) représentation log-lin de σ_N en fonction de N .

comportement en loi d'échelle de la forme (I.27), $\mathbb{E}[\varepsilon_r^q] \sim r^{\tau(q)}$ ($0 \leq q \leq 3$), est observé y-compris sur une image unique. Rappelons que nous utilisons systématiquement la notation $\tau(q)$ plutôt que $\zeta(q)$ pour les exposants associés à une densité. Les intervalles de confiance empiriques à 95% montrent que les $\tau(q)$ estimés s'écartent significativement d'un comportement linéaire, voir figure V.4(b). Par conséquent, l'approche multifractale fait sens et les exposants estimés sont semblables à ceux d'une CID.

Nous ne prétendons pas que chaque image est multifractale quelle que soit la région considérée, mais seulement que, en moyenne, un modèle multifractal tel que les CID est pertinent pour reproduire les propriétés statistiques d'un ensemble d'images naturelles. En réalité, les images naturelles rassemblent différentes sortes de singularités dues à la présence de contours, où se concentrent les grandes variations, ainsi qu'à la présence de régions texturées (qui peuvent être multifractales elles-mêmes) ou d'un effet de perspective.

1.4.2 L'analyse de Ruderman & Bialek

Divers auteurs ont imaginé des méthodes d'analyse variées pour tenter de caractériser les images naturelles d'un point de vue statistique. Ruderman & Bialek [173–175] décrivent l'analyse statistique d'un ensemble de 54 images prises dans les bois de Hacklebarney State Park dans le New Jersey. Ils étudient le lien entre le caractère non gaussien des distributions et l'inhomogénéité des gradients en définissant un log-contraste $\phi_N(\mathbf{x})$ comme les moyennes de $\phi = \log(I/I_o)$ dans des blocs de taille $N \times N$ autour de chaque pixel à la position \mathbf{x} . Soit σ_N la variance (spatiale) de $\phi_N(\mathbf{x})$ à N fixé. Ils observent que les quantités normalisées $\phi_N(\mathbf{x})/\sigma_N$ sont pratiquement identiquement distribuées. Nous montrons que cette observation est une fois encore cohérente avec le cadre des CID.

Soit ω une variable aléatoire distribuée par la distribution supposée identique des $\phi_N(\mathbf{x})/\sigma_N$ et soit $W = e^\omega$. Soit $I^{(N)}(\mathbf{x}) = \exp[\phi_N(\mathbf{x})]$; $I^{(N)}$ est la moyenne géométrique de

l'intensité dans un bloc de taille $N \times N$. Les résultats de Ruderman & Bialek se réécrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_N(\mathbf{x})}{\sigma_N} &\stackrel{\text{loi}}{=} \omega \Leftrightarrow \phi_N(\mathbf{x}) \stackrel{\text{loi}}{=} \omega \cdot \sigma_N \\ &\Rightarrow I^{(N)}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{loi}}{=} W^{\sigma_N} \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Ainsi, une hiérarchie multiplicative (en loi) apparaît pour la quantité $I^{(N)}$. La quantité σ_N prend la signification d'une mesure de désordre (clutter) à l'échelle N qui peut s'interpréter comme la profondeur d'une cascade multiplicative.

Cette "auto-similarité" des histogrammes du log-contraste est attendue pour les CID avec $\sigma_N \propto \tau(2) \log N$. La figure V.5 illustre les résultats numériques obtenus à partir d'un grand nombre de réalisations d'images CID de taille 512x512, voir figure V.5(a). Les histogrammes normalisés ont effectivement une allure très similaire malgré des statistiques moindre aux grandes échelles qui peuvent expliquer certains écarts, voir figure V.5(b). Un raisonnement "avec les mains" amène Ruderman [173] à proposer une dépendance de la forme $\sigma_N \propto N^{-\nu}$ illustrée par une régression linéaire dans un diagramme log-log de σ_N en fonction N . L'exposant estimé vaut $\nu \simeq -0.2$, voir figure V.5(c). La figure V.5(d) montre dans un graphe log-lin cette fois de σ_N en fonction de $\log N$ qu'une dépendance de la forme $A - B \log N$ est au moins aussi pertinente, ce qui serait cohérent avec une modélisation par les CID.

1.5 Conclusion

Nous avons montré la grande pertinence des cascades infiniment divisibles pour la modélisation statistique des images naturelles. Peu de modèles sont capables de reproduire conjointement autant de propriétés statistiques des images naturelles. Nous disposons ainsi d'un cadre de réflexion manifestement pertinent qu'il va falloir exploiter dans l'espoir de proposer de nouvelles approches et de nouvelles techniques de traitement d'image. L'un des obstacles à surmonter risque de venir des difficultés posées par l'estimation des paramètres évoquée dans le chapitre précédent.

Ce travail nous a amenés sur le terrain de l'image, très différent de la physique de la turbulence. Le prolongement naturel sera l'exploitation de la vision-modèle que nous avons proposée pour développer de nouvelles techniques de traitement d'image. Les multiples rencontres au sein de la communauté "image" devraient aboutir à de prochaines collaborations sur ce sujet. Notamment, un projet en collaboration avec des mathématiciens appliqués et des traiteurs d'image est en gestation. Un autre projet orienté vers les applications en imagerie médicale sera aussi l'occasion de se familiariser avec d'autres aspects et techniques de l'image telles que les méthodes level-set et le fast-marching, confirmant une coloration de plus en plus "image" de nos recherches.

2 Modélisation d'images de Soleil calme

2.1 Motivations

Dans le cadre d'une collaboration avec Véronique Delouille et Jean-François Hochedez de l'équipe de Physique Solaire de l'Observatoire Royal de Belgique, nous nous intéressons à la modélisation d'images du Soleil acquises dans l'extrême ultraviolet par le télescope Extreme ultraviolet Imaging Telescope (EIT) de la mission Solar and Heliospheric Observatory (SoHO, ESA/NASA). Ce travail est aujourd'hui prolongé dans le cadre de la thèse d'Émilie Koenig. Nous nous sommes intéressés aux régions les moins structurées en apparence, le "Soleil calme". L'objectif principal est de proposer une méthode permettant de prédire l'allure et la qualité des images que pourraient fournir de futures missions à (très) haute résolution, par exemple 80 km au lieu de 1800 km aujourd'hui pour EIT. Il s'agit de garantir l'intérêt scientifique de telles missions aux coûts exorbitants.

Les capteurs CCD utilisés sont essentiellement des compteurs de photons, les photons arrivant selon un processus de Poisson. L'un des problèmes des observations à haute résolution est la baisse du rapport signal/bruit lorsque la résolution s'affine. Or il est impossible de savoir a priori comment est répartie l'intensité à l'intérieur d'un pixel. Grâce aux modèles invariants d'échelle que nous proposons, on pourra envisager d'extrapoler (au sens statistique) la structure des images en dessous des échelles actuellement accessibles. À terme, nous pourrions proposer un critère pour définir les régions dont la description à haute résolution présente un intérêt potentiel (rapports signal/bruit suffisant et présence de détails sous-pixel). Un autre objectif est de permettre la validation d'algorithmes de traitement tels que *Velociraptor* [97], un outil d'extraction des mouvements à la surface du Soleil grâce à une technique de flot optique.

Notre travail s'est décomposé en deux grandes étapes : une analyse des images de Soleil calme permettant de mettre en évidence des propriétés de multiscaling [58, 76] puis l'élaboration d'une méthode d'extrapolation d'images haute résolution à partir des images (basse résolution) actuelles [121, 122].

2.2 Le Soleil calme

L'activité du Soleil est très complexe. Elle obéit à un cycle de période 11 ans environ. Dans les phases les plus actives, on observe de grandes structures magnétiques ayant une géométrie et une dynamique propres et appelées 'régions actives'. Celles-ci sont le sujet d'études approfondies [9, 192]. Dans les périodes les plus calmes, ces structures sont moins nombreuses et, dans la bande passante centrée sur $\lambda = 19,5$ nm, on observe de grandes zones beaucoup moins ordonnées, au moins en apparence. On pense alors à une sorte de fond turbulent : c'est ce que l'on appelle le "Soleil calme" [41, 160]. Cette appellation aux consonances rassurantes masque sans doute une réalité bien plus agitée mais dont le détail est inaccessible du fait d'une résolution insuffisante des instruments actuels.

La mission SoHO (Solar and Heliospheric Observatory) lancée conjointement par l'ESA et la NASA a notamment embarqué le télescope EIT [10] (Extreme ultraviolet Imaging

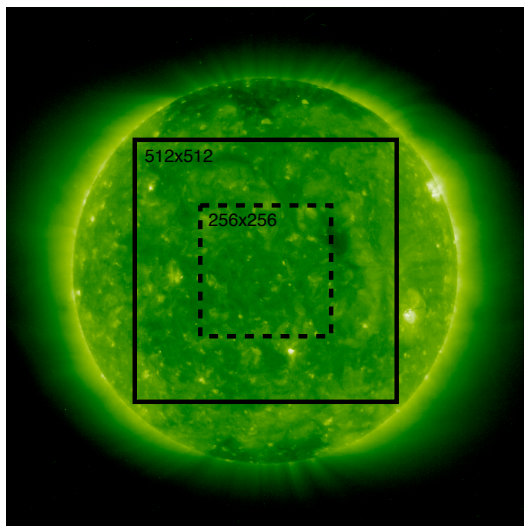


Fig. V.6: Exemple d'image acquise par EIT à la longueur d'onde $\lambda = 19,5$ nm.

Telescope) qui fournit des images du Soleil dans l'extrême ultraviolet ($\lambda = 19,5$ nm par exemple) avec une résolution de $(1800\text{km})^2/\text{pixel}$ environ. Cette résolution reste assez grossière relativement aux plus petites échelles physiques mises en jeu qui sont $\lesssim 100$ m. La qualité des observations s'en trouve limitée sans qu'on sache précisément quantifier à quel point. Nous proposons d'exploiter l'invariance d'échelle constatée dans les images pour extrapoler les informations sous-pixels, au moins au sens statistique.

2.3 Analyse multifractale des images de Soleil calme

2.3.1 Démarche

Nous avons sélectionné un ensemble de 54 images acquises en 1997 (période calme du cycle solaire) dans la bande passante 19,5 nm de EIT en éliminant les images qui contenaient manifestement des régions actives, voir figure V.6. Au-delà des analyses classiques (spectre, histogrammes...) étudiées en détail dans la littérature, ces images possèdent une propriété d'invariance d'échelle [41, 77]. L'analyse multifractale permet de décrire finement la structure de corrélation spatiale de ces images. Nous en déduisons l'identification d'une famille de processus stochastiques permettant de reproduire un comportement statistique similaire et ayant une allure visuelle comparable. Précisons bien qu'il ne s'agit pas ici d'une approche s'appuyant sur une simulation numérique directe des écoulements magnéto-hydrodynamique à la surface du Soleil ; au contraire nous proposons de modéliser les images du Soleil calme par des processus stochastiques appropriés.

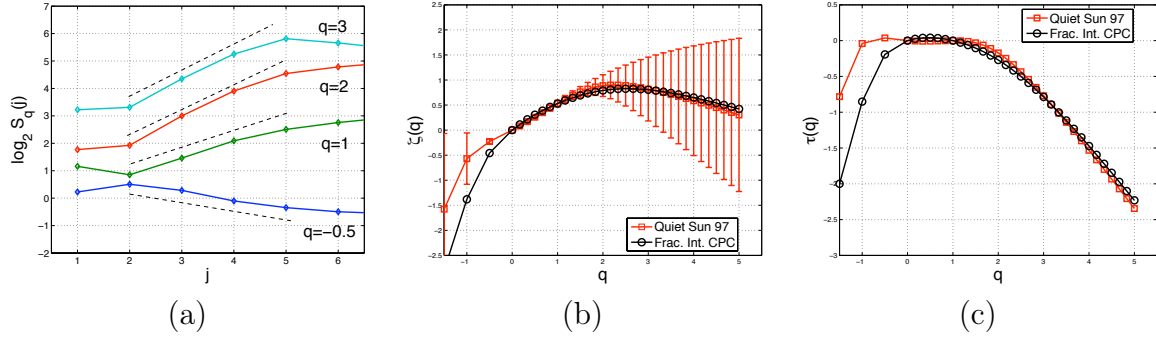


Fig. V.7: (a) Fonctions de structure ($q = 0.33, 1, 2$) estimées sur une image de Soleil calme de 1997; (b) exposants $\zeta(q)$ estimés sur les images de Soleil calme, et sur les images simulées à partir de cascades Poisson composées; (c) exposants $\tau(q)$ déduits de $\zeta(q)$ par la relation $\tau(q) = \zeta(q) - q\zeta(1)$.

2.3.2 Description des données

Les images acquises par le télescope EIT sont de taille 1024×1024 , et représentent le Soleil entier, voir figure V.6. Pour limiter les déformations dues à la courbure du Soleil à 15% environ, nous n'avons retenu dans ces images qu'une zone de largeur égale à 512 pixels cadrée sur le centre du disque solaire apparent. Afin d'éliminer les images contenant une région active, nous n'avons retenu que les images présentant des intensités I telles que $P(I > U) < 10^{-4}$. Le seuil U est déterminé en calculant le quantile U tel que $P(I > U) = 10\%$ pour une image contenant une région active. Nous avons obtenu un ensemble de 54 images de taille 512×512 sans forte région active, et sans rayon cosmique (se traduisant habituellement par la présence d'un point très brillant isolé). Par la suite, la gestion des effets de bord dans l'analyse en ondelette amène à ne prendre finalement en compte que les coefficients d'ondelettes associés au carré central de 256×256 . Autrement dit, l'analyse multifractale est effectuée sur des images de 512×512 mais nous ne retenons que les résultats affranchis de tout effet de bord; par conséquent c'est en réalité un carré central de 256×256 qui sera caractérisé par notre analyse.

2.3.3 Résultats de l'analyse multifractale

Nous avons d'abord étudié la pertinence de l'hypothèse d'invariance d'échelle pour les images de Soleil calme (spectre, intermittence...). Nous avons ensuite procédé à une analyse multifractale sur les coefficients d'ondelette discrets, voir chap.IV. La figure V.7 présente les résultats obtenus, notamment les exposants multifractals $\zeta(q)$ estimés. Rappelons que la méthode d'analyse multifractale utilisée ici ne permet pas d'estimer de façon fiable les exposants d'ordre $q < 0$ (l'estimateur est instable numériquement) ce qui explique les écarts observés pour cette gamme de valeurs sur la figure V.7(c) et qui n'ont rien d'inquiétant. Les ordres $q < 0$ ne sont pas pris en compte dans l'identification du modèle par la suite, seuls les $\{\zeta(q), q \geq 0\}$ seront utilisés.

2.4 Modélisation par des CPC intégrées fractionnairement

2.4.1 Identification des paramètres H et $\tau(q)$

Une fonction $\zeta(q)$ étant estimée sur les données expérimentales, il s'agira de proposer un processus modèle partageant les mêmes propriétés de multiscaling, autrement dit les mêmes exposants $\zeta(q)$. Pour cela, nous procédons en deux étapes correspondant à la décomposition de la fonction $\zeta(q)$ en 2 termes :

$$\zeta(q) = qH + \tau(q) \quad (\text{V.9})$$

où d'une part $\tau(q)$ est une fonction concave non-linéaire telle que $\tau(0) = \tau(1) = 0$ et d'autre part le paramètre H décrit la tendance linéaire de $\zeta(q)$. Notons au passage que $\zeta(1) = H$. Le caractère multifractal du processus est gouverné par la composante $\tau(q)$ lorsqu'elle est non-nulle, c'est-à-dire lorsqu'elle peut s'interpréter comme l'ensemble des exposants multifractals de la densité d'une mesure multifractale. Si l'on se contentait de modéliser les images par un mouvement Brownien fractionnaire (strictement auto-similaire) de paramètre de Hurst H_o , on aurait $H = H_o$ et $\tau(q) = 0$. A la différence du mouvement Brownien fractionnaire (monofractal) qui peut être synthétisé directement, on doit procéder en deux temps pour synthétiser un processus multifractal. Les exposants $\tau(q)$ caractérisent une mesure multifractale sous-jacente qu'il faut préalablement construire. On obtient ensuite un processus d'exposants $\zeta(q)$ par pseudo-intégration, autrement dit en appliquant un filtre en $1/\|k\|^H$ à la mesure sous-jacente, où k dénote les fréquences dans le domaine de Fourier.

On observe ici typiquement que $\zeta(1) \simeq 0.55 \pm 0.06$. Il est alors assez naturel d'envisager d'obtenir un modèle par filtrage en $1/\|k\|^H$ (avec $H = \zeta(1)$) de la densité d'une mesure caractérisée par une fonction $\tau(q)$.

2.4.2 Cascades Poisson composées intégrées fractionnairement

Nous avons envisagé les modèles possibles, parmi ceux dont la simulation numérique est accessible, ce qui était aussi potentiellement un critère de choix. Un processus gaussien obtenu par simple filtrage, pour respecter le spectre de Fourier, ne reproduirait pas les propriétés de multiscaling observées. Un processus stable ne permet pas d'obtenir des exposants $\zeta(q)$ convenables. Par contre, nous avons pu montrer que les images obtenues par filtrage en $1/\|k\|^H$ de cascades Poisson composées associées à des exposants $\tau(q)$ connus étaient un bon modèle, au moins au sens statistique, avant d'aborder l'aspect esthétique. En tenant compte de l'effet de linéarisation décrit par (IV.12)p.79, les exposants multifractals des images résultantes sont alors donnés par :

$$\zeta_{CPC}(q) = \begin{cases} qH + \tau_{CPC}(q) & \text{pour } 0 \leq q \leq q_+^* \\ 2 - q\zeta'(q_+^*) & \text{pour } q \geq q_+^*. \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

La valeur de q_+^* en dimension 2 est solution de $\zeta(q) = 2 - q\zeta'(q)$. Le meilleur modèle disponible est une CPC telle que les multiplicateurs sont de la forme $W_i = ((1 + T)^{1/T} u)^T$

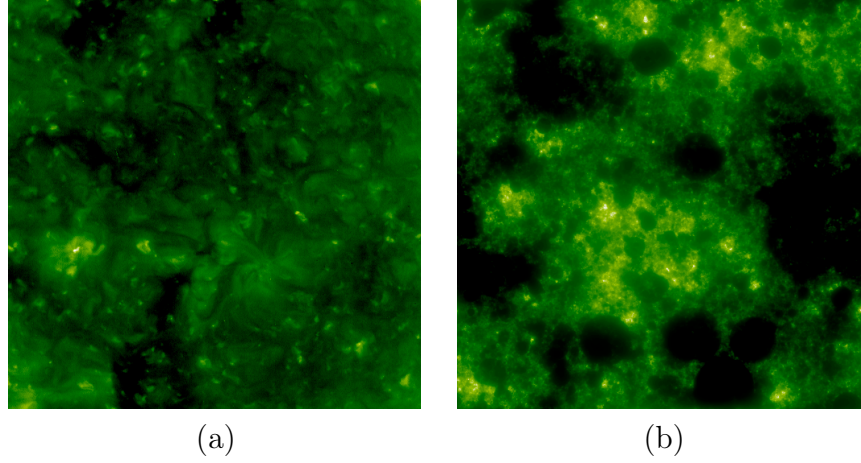


Fig. V.8: Exemples d'images 512×512 de (a) Soleil calme, (b) une cascade Poisson composée intégrée fractionnellement.

avec u uniforme dans $[0, 1]$. Les exposants associés (toujours en tenant compte de l'effet de linéarisation) sont donnés par

$$\zeta_{CPC}(q) = \begin{cases} qH + 1 - \frac{(1+T)^q}{(1+qT)} & \text{pour } 0 \leq q \leq q_+^*, \\ 2 - q\zeta'(q_+^*) & \text{pour } q \geq q_+^*, \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

avec $T = 0.85$ et par conséquent $q_+^* \simeq 2.25$.

Nous proposons de modéliser les images de Soleil calme par les images obtenues par filtrage en $1/\|k\|^H$ avec $H = \hat{\zeta}(1) = 0,55$ à partir des CPC ci-dessus. Au prix d'un léger abus de langage, nous appellerons ce modèle *cascade Poisson composée intégrée fractionnellement*. Afin de valider notre approche, nous avons comparé les exposants estimés sur les images de Soleil calme avec ceux estimés sur un ensemble équivalent de 54 images, voir figure V.7(c). L'adéquation n'est pas parfaite, mais relativement satisfaisante. De plus le spectre de Fourier des images synthétiques est similaire à celui des images de Soleil calme avec un comportement en $1/k^{2+\tau(2)+2H} \sim 1/k^{2,8}$ habituellement rapporté dans la littérature. Enfin, après tout ce travail de modélisation "en aveugle", nous pouvons comparer le résultat visuel, figure V.8. L'image simulée présentée ici est brute, aucun post-traitement n'a été utilisé pour améliorer l'aspect de l'image. En faisant abstraction des aspects géométriques qui n'ont pas été pris en compte dans la modélisation, l'aspect des deux images est tout à fait comparable en terme d'inhomogénéité et de variation d'intensité. L'adéquation du modèle statistique se traduit bien par une adéquation visuelle, dans les limites que nous avons déjà mentionnées.

Sur la base de ce modèle, nous avons effectué une première étude de l'évolution lors d'un changement de résolution du rapport signal sur bruit défini comme le rapport de l'intensité mesurée à son écart type. Sous l'hypothèse que l'intensité mesurée est issue d'un processus de Poisson de comptage de photons, l'intensité se lit directement comme le carré d'un rapport signal sur bruit (la variance d'un processus de Poisson est égale à son

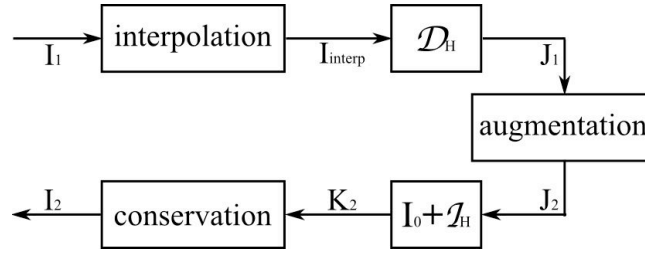


Fig. V.9: Représentation schématique de la procédure d'extrapolation stochastique.

espérance). Cette étude a permis de vérifier une fois encore le comportement similaire des images provenant respectivement du Soleil calme et du modèle. Pour aller plus loin, il faut une solution permettant de coupler le modèle aux images réelles dans l'idée d'augmenter artificiellement la résolution de ces dernières en y injectant de l'information issue du modèle. Ainsi nous pourrions accéder à des images virtuellement haute résolution dont nous pourrions étudier toutes les propriétés. Ce travail fait partie de la thèse de Emilie Kœnig. Nous présentons maintenant les grandes lignes des résultats obtenus.

2.4.3 Augmentation virtuelle de résolution

Grâce au travail précédent, nous disposons d'une modélisation des images de Soleil calme par des processus aléatoires, des cascades Poisson composées intégrées fractionnairement dont nous avons identifié un paramétrage. Dans le cadre de la thèse d'Émilie Kœnig, nous nous sommes intéressés au développement d'une technique permettant d'ajouter des détails sous-pixels issus du modèle dans une image de Soleil calme. L'idée consiste à effectuer une sorte d'extrapolation stochastique pour simuler des images haute résolution, à une résolution quelconque. Pour une même image de départ, nous disposerons alors potentiellement d'une infinité de versions (aléatoirement) extrapolées. Pour que cette approche reste physiquement cohérente, nous avons imposé un critère de conservation de l'intensité à l'intérieur d'un pixel. Ce travail sera présenté en détail dans la thèse d'Émilie Kœnig. Nous en donnons seulement un bref aperçu.

L'image initiale est supposée avoir un aspect texturé, ce qui est le cas pour des systèmes turbulents tels que le Soleil ou les nuages. Nous supposons aussi que l'image a des propriétés d'invariance d'échelle caractérisées par des paramètres H et $\tau(q)$, voir plus haut. L'image est modélisée a priori par :

$$I_1 = I_0 + \alpha \mathcal{I}_H \{Q_{r_1}^{r_0} - 1\} \quad (\text{V.12})$$

où I_0 est la moyenne de l'intensité de l'image ; le terme de fluctuation est modélisé par une CPC intégrée fractionnairement (opérateur \mathcal{I}_H) et de moyenne nulle, amplifiée par un facteur α . Les échelles r_0 et r_1 sont la plus grande et la plus petite ($= 1$ pixel) échelle présentes dans l'image. Nous insistons sur le fait que ce modèle *global* de l'image n'a pas vocation à être effectivement pertinent pour décrire exactement l'image initiale : il s'agit seulement d'une hypothèse de travail pour en déduire une procédure *locale* d'extrapolation.

La procédure finale se décompose en 5 étapes résumées schématiquement sur la figure

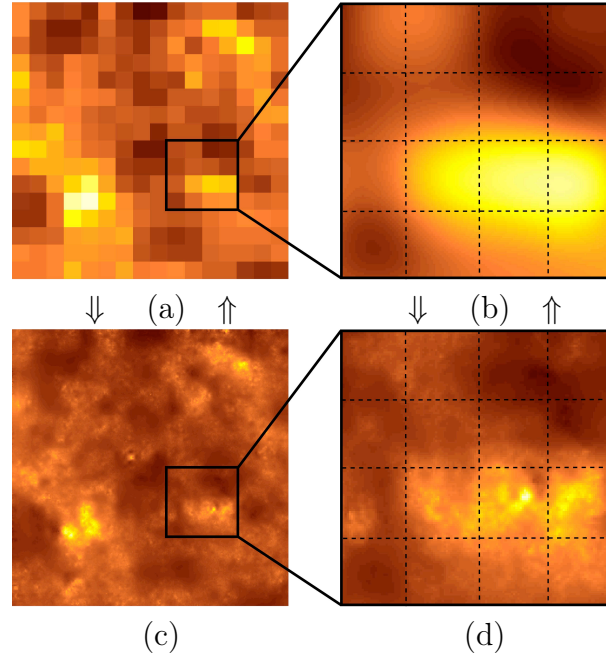


Fig. V.10: Illustration de la procédure d'amélioration virtuelle de la résolution : (a) image initiale 16×16 , (b) agrandissement 'x32' par interpolation d'une région de 4×4 pixels, (c) extrapolation et agrandissement 'x32', (d) détails de la région encadrée. Les pointillés délimitent les pixels initiaux.

V.9. L'étape d'interpolation consiste en un simple agrandissement de l'image, sans ajout de détails. L'étape de dérivation fractionnaire \mathcal{D}_H (un filtre en $\|k\|^H$) fournit l'équivalent d'une densité de distribution (de même nature mathématique qu'une CID Q_ℓ) sous jacente. L'étape d'augmentation consiste simplement à exploiter la propriété de décomposition d'une CPC en échelle $Q_{r_2}^{r_0} = Q_{r_1}^{r_0} \cdot Q_{r_2}^{r_1}$ pour ajouter les détails petite échelle créés par $Q_{r_2}^{r_1}$ dans l'image. L'étape d'intégration fractionnaire \mathcal{I}_H (un filtre en $\|k\|^{-H}$) permet de revenir à un objet de même nature mathématique (plutôt de type "mesure" que "densité") que l'image initiale. La dernière étape assure la cohérence physique de l'extrapolation en assurant la conservation de l'intensité totale au sein d'un pixel initial. La figure V.10 présente un exemple d'extrapolation d'un facteur 32 (issu de 5 augmentations d'un facteur 2) d'une image initiale de taille 16×16 ; l'image V.10(c) est une image 512×512 . L'image V.10(b) résulte d'une simple interpolation tandis qu'une augmentation d'information a été utilisée pour obtenir l'image V.10(d).

2.5 Conclusion

Cette collaboration entamée il y a environ 4 ans avec l'équipe de Physique Solaire de l'Observatoire Royal de Belgique à Bruxelles a été et continue d'être une expérience très riche. C'est une très belle occasion de confronter les outils de modélisation par des processus aléatoires invariants d'échelle à une situation concrète où des prédictions sont attendues.

Des décisions opérationnelles quant aux futures missions spatiales seront sans doute influencées directement ou indirectement par ce travail. C'est à la fois une satisfaction et une motivation supplémentaires. La dernière partie n'est pas encore complètement publiée et fait encore l'objet de généralisations, notamment pour prendre en compte des aspects géométriques (anisotropie) dans la procédure d'amélioration virtuelle de la résolution. La méthode que nous proposons est originale et propose, grâce à son caractère stochastique, plusieurs versions extrapolées à haute résolution d'une même image à basse résolution. Elle permet d'obtenir tout à la fois un rendu visuel de ces images et une prédiction quantitative des statistiques (histogrammes notamment) des images à haute résolution. Ces prédictions vont permettre d'apporter des éléments de réponse essentiels aux questions que se posent les physiciens solaires concernant ce qu'ils peuvent espérer des missions futures. Les idées exploitées pourront par exemple être étendues en 3D pour la modélisation de nuages.

VI. Collaborations avec des industriels

Ce chapitre présente des travaux effectués dans le cadre de collaborations sous contrat avec des industriels dans des contextes scientifiques très différents. Le premier travail concerne le diagnostic de l'état des galets du système de guidage du Translohr, le tramway sur pneumatiques récemment installé à Clermont-Ferrand. Ce projet a fait l'objet de la thèse de Zahra Hamou Mamar [104] soutenue en juillet 2008. Le deuxième travail est mené dans le cadre d'un contrat avec le service R&D du constructeur automobile PSA. Il s'agit de proposer une méthode de simulation des composantes turbulente et acoustique d'un champ de pression en paroi. Ce projet s'inscrit dans la problématique industrielle de la réduction des bruits dus à l'écoulement de l'air sur les parois d'un véhicule. Le contrat, étalé sur 1 an, s'est terminé en juin 2009. Il a donné lieu à la remise de deux rapports internes ainsi qu'à une communication [61].

1 Diagnostic de l'état des galets du système de guidage du Translohr

De septembre 2004 à juillet 2008, j'ai coencadré la thèse de Zahra Hamou-Mamar débutée en 2003 sous la direction d'Alexandre Aussem, depuis Professeur à l'Université Lyon 1. La thèse était financée dans le cadre d'un contrat fiavec le Syndicat Mixte des Transports Clermontois (SMTC) pour 3 ans, renouvelé 1 an. Le projet impliquait aussi les sociétés LORH *industrie*, constructeur du tramway, et *Signal Développement* chargée de l'acquisition des signaux et de l'exploitation opérationnelle du système. L'objectif de la thèse était la mise au point d'un système appelé SYSCOGA, SYStème de COntôle des GAlets permettant le diagnostic et le suivi de l'état d'usure des galets du système de guidage du nouveau tramway sur pneumatiques Translohr désormais en fonctionnement à Clermont-Ferrand. Même si le déroulement de la thèse a été perturbé par l'état de santé de Zahra Hamou suite à un accident survenu en février 2006, il a pu être mené à son terme grâce à la détermination et au courage de Zahra. Nous résumons ici le contenu de ce travail qui donné lieu à publication [105, 106]. Nous renvoyons au manuscrit de la thèse [104] pour une présentation complète. Une partie du travail de développement logiciel a donné lieu au stage d'ingénieur 2ème année de Hélène Toussaint d'avril à septembre 2006.

1.1 Présentation du problème

La ville de Clermont-Ferrand a choisi d'installer le tout nouveau tramway sur pneumatiques (Michelin) conçu par la société Lohr Industrie (Duppigheim, Alsace), voir figure

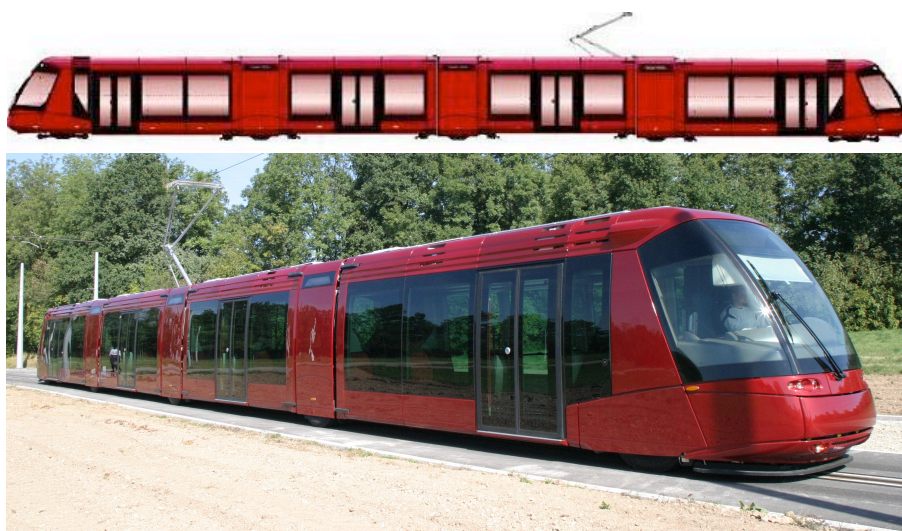


Fig. VI.1: Le Translohr. En bas à droite on aperçoit le rail de guidage.

VI.1. Ce tramway est guidé par un rail central unique qui n'est pas porteur contrairement aux transports sur voie ferrée traditionnelle. Le rail est enserré par des couples de galets orientés à 45 degrés, voir figure VI.2. Ces galets circulaires métalliques sont recouverts d'un bandage composite destiné à éviter un contact métal-métal et les nuisances sonores qu'il engendrerait. Ce bandage est aussi voué à s'user. Il doit faire l'objet d'un suivi et d'une maintenance permanente et potentiellement coûteuse en moyens humains. Disposer d'un système automatique est un enjeu technologique mais aussi économique.

1.2 Principe de fonctionnement de SYSCOGA

En résumé, nous enregistrons les vibrations engendrées par les galets défectueux lors du passage du tramway. Le signal est représenté par un scalogramme issu d'une transformée en ondelettes continue. Grâce à un découpage temporel, une matrice de coefficients d'ondelettes est associée à chaque couple de galets. Une décomposition en valeurs singulières (SVD) permet de réduire la dimensionnalité du problème. Nous procédons à une classification supervisée des défauts des galets. Enfin, une classification multi-classes est effectuée à l'aide d'un ensemble de sous-classifieurs selon la stratégie "un contre un". Nous avons comparé les résultats obtenus pour différentes méthodes : k plus proches voisins (k -PPV), réseaux de neurones à base radiales (RBF) et Machines à Vecteurs Supports (SVM). Avec les SVM et l'utilisation des vecteurs singuliers, les taux de bonnes classification sont supérieurs à 96% et souvent proche de 99%. Le système est actuellement en phase d'implantation sur site.

Le système de mesure est schématiquement représenté sur la figure VI.3. Les vibrations du rail sont mesurées à l'aide de trois accéléromètres positionnés sous une plaque d'aiguillage. Ces capteurs fournissent chacun trois signaux correspondant aux vibrations latérales, verticales et horizontales du rail. Pour des conditions optimales d'acquisition le

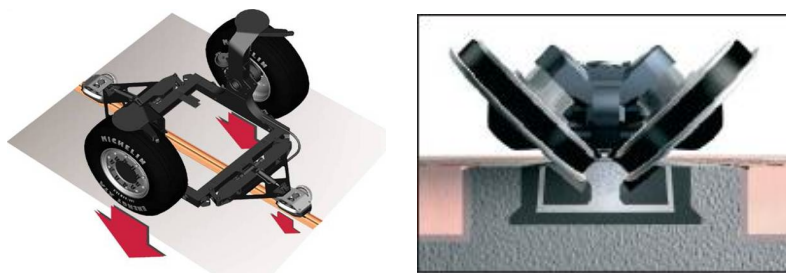


Fig. VI.2: Système de guidage du Tranlohr : 2 couples de galets enserrant le rail de guidage à 45 degrés en amont et en aval de chaque essieu.

tramway doit être à une vitesse d'environ 30 km.h^{-1} . Les signaux sont échantillonnés à 44100 Hz. Deux balises photoélectriques repèrent le passage des essieux.

Grâce aux repères temporels fournis par les balises photoélectriques et une modélisation très simple du mouvement du tramway, les signaux obtenus, voir figure VI.3 peuvent être découpés en tranches correspondant aux différents couples de galets. Le diagnostic est effectué pour chaque tranche sous l'hypothèse validée expérimentalement que, à un instant donné, c'est le couple de galet le plus proche des accéléromètres qui contribue majoritairement au signal.

1.3 Approche par décomposition multi-échelle et classification

Après diverses tentatives et plusieurs campagnes d'essais pour les mesures expérimentales, nous avons finalement choisi une approche reposant sur la combinaison d'un pré-traitement des signaux par une analyse temps-échelle suivi d'une classification supervisée utilisant les SVM. En effet, on s'attend à ce que le contenu fréquentiel du signal vibratoire dont le roulement sur le rail constitue la source soit fonction de l'état d'usure des galets.

Nous appliquons tout d'abord au signal une transformée en ondelettes, voir figure VI.3. Cette transformation crée une matrice dont les lignes représentent des fréquences et les colonnes des instants. La matrice obtenue est ensuite découpée en temps et en fréquence. Le découpage temporel permet d'isoler chaque couple de galets. Le découpage fréquentiel est fixé par rapport à la fréquence de rotation F_{rot} du galet (environ 12 Hz pour une vitesse de 30 km.h^{-1}). Les fréquences inférieures à F_{rot} donnent des informations liées à la forme du galet ou à la dynamique du tramway (et non au bandage). Les hautes fréquences (supérieures à environ 350 Hz) ne sont pas intéressantes car elles sont trop bruitées. Nous ne gardons donc que les fréquences situées entre $F_{rot} \simeq 10 \text{ Hz}$ et 350 Hz. Le découpage isole une matrice par couple de galets (soit par exemple 8 matrices pour un tramway 4 essieux). Nous travaillons ensuite soit avec les plus grandes valeurs singulières de chaque matrice, soit avec les vecteurs singuliers. Chaque couple de galet est maintenant représenté par un vecteur (quelques valeurs singulières, ou un vecteur singulier). La dernière étape consiste à reconnaître la classe de chaque vecteur, les types de défauts que l'on souhaite identifier ayant été préalablement définis. Le diagnostic se fait en deux temps : détection

de la présence d'un défaut puis identification du type de défaut (par exemple trous, usure 75%...). Pour cela nous utilisons les SVM (Support Vector Machines ou Séparateurs à Vastes Marges). Ce classifieur détermine la classe de chaque vecteur et donc l'état du bandage de chacun des couples de galets. La démarche pour les deux autres capteurs est identique. On aura ainsi trois décisions concernant la classe de chacun des couples de galets. Pour finir on effectue un vote entre les capteurs.

1.4 Résultats et conclusion

La méthode mise en œuvre s'avère très efficace avec un taux de bonne classification proche de 99%. Si notre approche n'est pas totalement nouvelle, sa mise en œuvre rigoureuse, son utilisation dans le domaine ferroviaire et la nouveauté du système de guidage étudié rend notre application tout à fait originale. Pour effectuer l'étape de classification, les performances de plusieurs méthodes ont été comparées afin de retenir la meilleure. Ces résultats ont été publiés dans [105, 106].

Cette thèse a été l'occasion de mettre le pied à l'étrier dans un coencadrement de thèse demandant une forte implication puisque A. Aussem était à Lyon. Elle a aussi été l'occasion de découvrir un travail de recherche beaucoup plus orienté vers les applications que le reste de mes travaux. Il a notamment fallu gérer le lien avec les différents partenaires avec toutes les difficultés qu'impliquent des cultures et des fonctionnements différents. Le travail a pu aboutir à une soutenance en juillet 2008 malgré les aléas liés à la santé de Zahra Hamou, c'est une satisfaction importante.

2 Modélisation de champs de pression en paroi par des processus stochastiques

Nous travaillons en collaboration avec Marc Pachebat, chercheur au service Recherche & Développement de PSA, depuis environ 1 an dans le cadre d'un contrat. Ce contrat touchera bientôt à sa fin. Nous en décrivons brièvement les grandes lignes ainsi que quelques exemples de résultats.

2.1 Position du problème

La contribution aérodynamique au bruit à l'intérieur du véhicule provient de la mise en vibration des parois du véhicule par les fluctuations du champ de pression dues à l'écoulement de l'air à l'extérieur du véhicule. Ce champ est constitué d'une composante advectée et d'une composante acoustique générée par la turbulence. Bien que leur structure spatio-temporelle et leur énergie soient très différentes chacune contribue au bruit intérieur du véhicule (voir par exemple [100]). L'étude expérimentale du champ de pression en paroi nécessite des systèmes de mesure sophistiqués utilisant un réseau serré de capteurs de petite taille (par exemple une antenne linéaire de 63 capteurs de 1 mm de diamètre espacés de 5 mm) dans le but d'accéder à une information spatio-temporelle, toujours

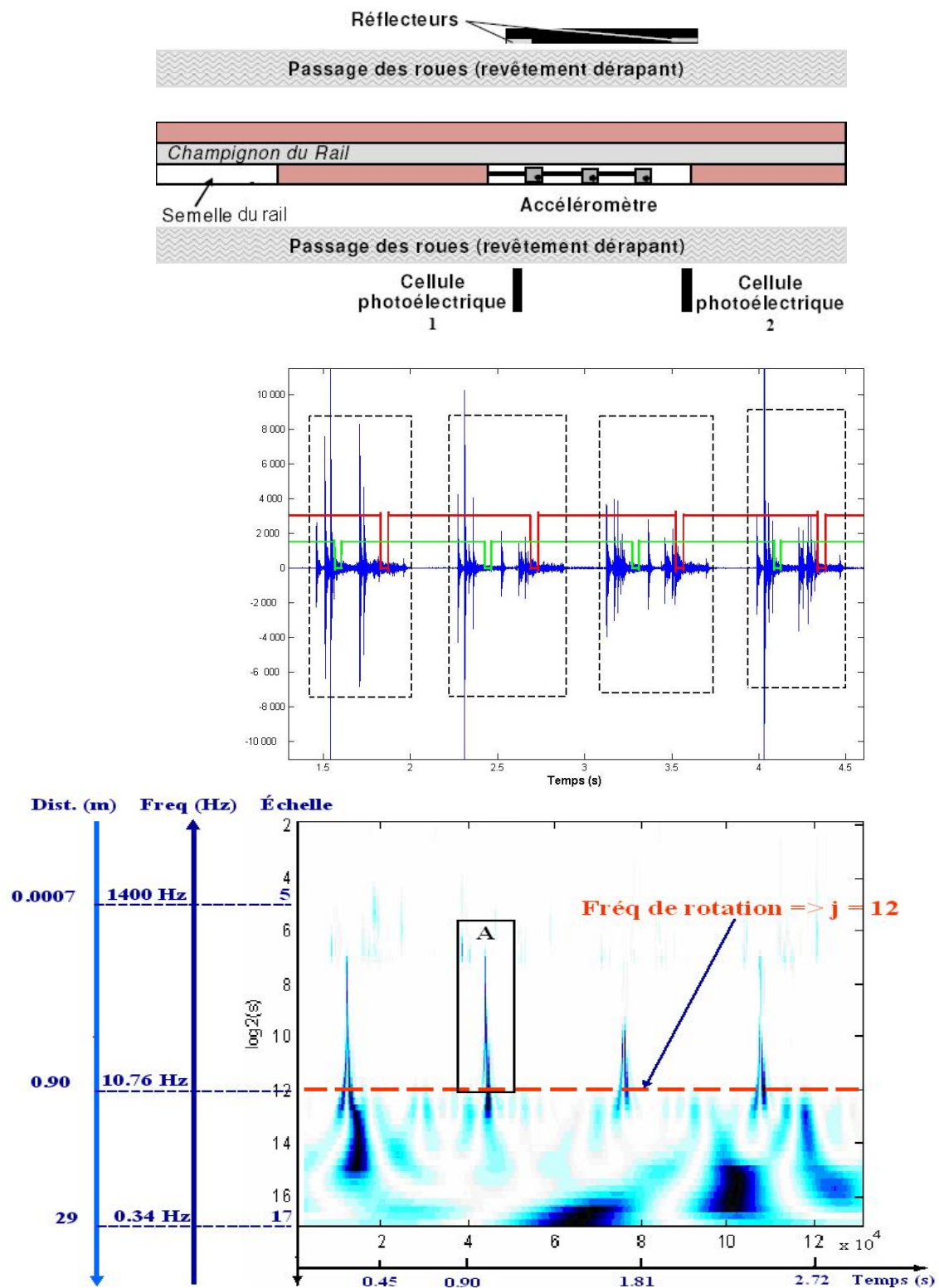


Fig. VI.3: Système de mesures utilisant 3 accéléromètres solidaires du rail (en haut); exemple de résultat d'une mesure sur un tramway à 4 essieux (au milieu); scalogramme d'un signal mesuré sur un tramway à 4 essieux (en bas).

limitée en pratique par l'apparition de phénomènes de repliement spectral, dans le domaine spatial notamment [14, 74]. Différentes méthodes peuvent être envisagées pour séparer les composantes advectée et diffuse du champ de pression et quantifier leur importance respective [15, 102]. Pour étudier et valider ces méthodes, nous avons besoin de les tester sur des signaux connus, ayant des propriétés similaires à celles d'un signal expérimental, les proportions respectives des deux composantes étant contrôlées (la composante diffuse est en général très difficile à identifier dans les mesures expérimentales).

2.2 Modélisation par des champs aléatoires

Pour cette étude, nous nous limitons au cas académique d'un écoulement sur plaque plane, ce qui nous affranchit des complications introduites par une géométrie tridimensionnelle. La prédiction détaillée de la pression pariétale et notamment de sa composante acoustique, est à ce jour inaccessible par la résolution des équations de Navier-Stokes utilisées classiquement, même au prix d'efforts numériques au maximum des capacités actuelles. Elles ne permettent pas de facilement visiter des situations variées ni de contrôler l'importance respective des composantes diffuse et turbulente. Nous proposons d'abandonner les approches traditionnelles pour simuler des champs de pression modélisés par des processus aléatoires à partir des modèles de corrélations et de spectres spatio-temporels existant dans la littérature (Corcos, Goody...). Ces simulations reposant sur une synthèse spectrale des processus utilisent éventuellement beaucoup de mémoire mais sont peu coûteuses en temps de calcul. Nous disposerons ainsi d'un outil léger et efficace fournissant des signaux aux propriétés connues (notamment en terme d'encombrement spectral spatio-temporel).

2.3 Illustration de quelques résultats

Les figures VI.4(a)&(b) présentent des exemples de données expérimentales acquises par PSA. Il s'agit de représentations en espace-temps (x, t) de données issues d'un ensemble de 63 capteurs espacés régulièrement et alignés sur une antenne. Les figures VI.4(c)&(d) représentent les résultats d'une de nos simulations basées sur les modèles de corrélation couramment acceptés dans la littérature acoustique. La simulation de la mesure du champ de pression par une antenne multicapteur placée dans le champ de pression nécessite le passage par une interpolation. Nous avons choisi d'utiliser les B-splines pour leur fidélité et leur efficacité [203–205]. Comme nos simulations permettent d'accéder au champ bidimensionnel de pression en paroi, les figures VI.4(e)&(f) présentent des exemples de champs aléatoires simulés correspondant respectivement à la composante turbulente et à la composante acoustique.

Ce travail est en voie de publication [61] et a fait l'objet d'un premier rapport officiel à PSA. Un deuxième rapport portant sur une étude des outils d'analyse multirésolution 2D (notamment les ondelettes et leurs cousines "starlets"...) existants et potentiellement pertinents pour étudier les données de PSA doit être remis en juin 2009.

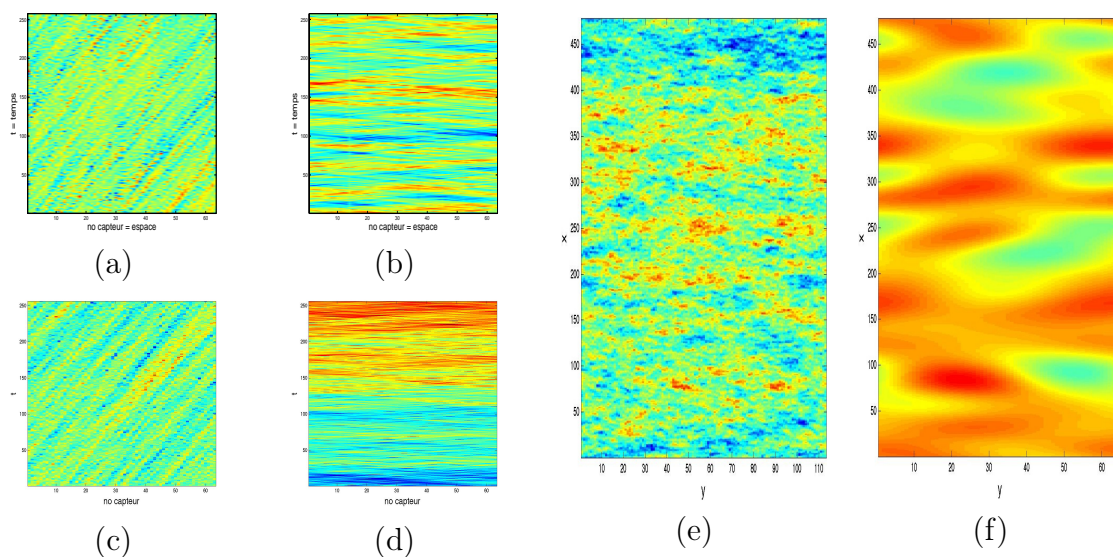


Fig. VI.4: Exemple de visualisation dans un plan (x, t) des mesures de champ de pression par l'antenne de 63 capteurs : (a) champ sous couche limite turbulente, (b) champ diffus en chambre réverbérante. Exemple de simulation d'une mesure par une antenne linéaire d'un champ de pression (c) sous couche limite turbulente, (d) diffus. Exemples d'un pas de temps de simulations d'un champ de pression (e) sous couche limite turbulente, (f) diffus.

3 Conclusion

Si ce chapitre consacré aux collaborations avec des industriels est très bref, ces travaux n'ont pas été négligeables, que la mesure soit en temps passé ou en quantité de choses apprises à travers ces projets.

Le projet sur le tramway a été très formateur sur de nombreux plans. Sur le plan scientifique d'abord, en m'amenant à me frotter à certaines techniques d'apprentissages et de classification, et en me confrontant aux exigences d'une application opérationnelle. Sur le plan humain, il a fallu concilier les exigences d'un travail universitaire approfondi avec celles plus contingentes d'une problématique à court terme ; il a aussi fallu gérer les hauts et surtout les bas d'une étudiante à la santé défaillante (mais courageuse et déterminée). Ces 4 années d'un cheminement accidenté resteront une expérience très formatrice, au contact d'une recherche directement applicative, à l'opposé de mes travaux sur la construction de mesures multifractales par exemple.

Le projet de PSA est un travail d'envergure beaucoup plus modeste. Il est néanmoins très satisfaisant et intellectuellement amusant d'être sollicité cette fois encore pour aborder des problématiques issues du monde industriel, avec des attentes très proches des applications finales. C'est un type de travail que je compte renouveler, chaque fois que l'occasion m'en sera donnée.

Bibliographie

- [1] P. Abry. *Ondelettes et Turbulence - Multirésolutions, Algorithmes de Décomposition, Invariance d'Echelle et Signaux de Pression*. Diderot, Editeur des Sciences et des Arts, Paris, 1997.
- [2] P. Abry, P. Chainais, L. Coutin, et V. Pipiras. Multifractal random walks as fractional Wiener integrals. *IEEE Trans on Info. Theory*, **55**, 8, pp. 3825–3846, 2009.
- [3] P. Abry, P. Flandrin, M. Taqqu, et D. Veitch. *Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data*. Wiley Interscience, 2000.
- [4] P. Abry, P. Gonçalves, et P. Flandrin. *Wavelets, spectrum estimation and $1/f$ processes*, chapitre 103. Springer-Verlag, New-York, 1995. Wavelets and Statistics, Lecture Notes in Statistics.
- [5] P. Abry, P. Gonçalves, et J. Lévy Véhel. *Lois d'échelle, fractales et ondelettes (vol. 1 & 2)*. Hermès, France, 2002.
- [6] P. Abry, B. Pesquet-Popescu, et M. S. Taqqu. Wavelet Based Estimators for Self Similar α -Stable Processes. Dans *Int. Conf. on Signal Proc., 16th World Computer Congress*. Beijing, China, August 2000.
- [7] P. Abry et F. Sellan. The wavelet-based synthesis of fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer : remarks and fast implementation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **3**, pp. 377–383, 1996.
- [8] P. Abry et D. Veitch. Wavelet Analysis of long-range dependent traffic. *IEEE Trans on Info. Theory*, **44**, 1, pp. 2–15, 1998.
- [9] D. Moses et al. EIT Observations of the Extreme Ultraviolet Sun. *Solar Physics*, **175**, pp. 571–599, 1997.
- [10] J. Delaboudinière et al. EIT : Extreme Ultraviolet Imaging Telescope for the SoHO mission. *Solar Physics*, **162**, pp. 291–312, 1995.
- [11] L. Alvarez, Y. Gousseau, et J. Morel. *The size of objects in natural images*, tome 111, pp. 167–242. Academic Press, New-York, 1999.
- [12] F. Anselmet, Y. Gagne, E. Hopfinger, et R. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, **140**, pp. 63–89, 1984.
- [13] J.-P. Antoine, D. Demanet, L. Jacques, et P. Vandergheynst. Wavelets on the sphere : implementation and approximations. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, **13**, pp. 177–200, 2002.
- [14] B. Arguillat. *Etude expérimentale et numérique de champs de pression pariétale dans l'espace des nombres d'onde, avec application aux vitrages automobiles*. Thèse de

- doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, 2006.
- [15] B. Arguillat, D. Ricot, G. Robert, et C. Bailly. Measurements of the wavenumber-frequency spectrum of wall pressure fluctuations under turbulent flows. Dans AIAA, rédacteur, *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (26th AIAA Aeroacoustics Conference)*, 2005. Paper 2005-2855.
 - [16] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, et J.-F. Elezgaray, J. Muzy. *Ondelettes, multifractales et turbulences*. Diderot, Editeur des Sciences et des Arts, Paris, 1995.
 - [17] A. Arneodo, E. Bacry, S. Manneville, et J. Muzy. Analysis of random cascades using space-scale correlation functions. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 4, pp. 708–711, 1998.
 - [18] A. Arneodo, E. Bacry, et J. Muzy. Random cascade on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.*, **39**, 8, pp. 4142–4164, 1998.
 - [19] A. Arneodo, N. Decoster, et S. Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *Eur. Phys. J. B*, **15**, pp. 567–600, 2000.
 - [20] J.-M. Aubry et S. Jaffard. Random wavelet series. *Comm. Math. Phys.*, **227**, pp. 483–514, 2002.
 - [21] B. Audit, E. Bacry, J.-F. Muzy, et A. Arneodo. Wavelet-based estimators of scaling behavior. *Information Theory, IEEE Transactions on*, **48**, 11, pp. 2938–2954, Nov 2002.
 - [22] A. Ayache, S. Léger, et M. Pontier. Drap brownien fractionnaire. *Potential analysis*, **17**, 31–43, 2002.
 - [23] E. Bacry, J. Delour, et J. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, **64**, pp. 026103, 2001.
 - [24] E. Bacry, A. Kozhemyak, et J.-F. Muzy. Continuous cascade models for asset returns. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **32**, 1, pp. 156–199, 2008.
 - [25] E. Bacry et J. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, **236**, pp. 449–475, 2003.
 - [26] E. Bacry et J. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, 2003. To appear.
 - [27] E. Bacry, J. Muzy, et A. Arneodo. Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis : exact results. *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 635–674, 1993.
 - [28] J.-M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, et M. S. Taqqu. Generators of long-range dependent processes : a survey. Dans P. Doukhan, G. Oppenheim, et M. S. Taqqu, rédacteurs, *Long-Range Dependence : Theory and Applications*, pp. 579–623. Birkhäuser, Boston, 2003.
 - [29] O. Barndorff-Nielsen et J. Schmiegel. Lévy-based Tempo-Spatial Modelling with Applications to Turbulence. *Uspekhi Mat. Nauk*, **159**, pp. 63–90, 2003.
 - [30] M. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press Professional, second edition édition, 1993.

- [31] J. Barral. *Random Multiplicative Multifractal Measures*, tome 72, chapitre Techniques for the Study of Infinite Products of Independent Random Functions, pp. 3–90. Proc. Symp. Pure Math., 2004.
- [32] J. Barral, X. Jin, et B. Mandelbrot. Construction of signed multiplicative cascades. *preprint*, 2009.
- [33] J. Barral et B. Mandelbrot. Multiplicative Products of Cylindrical Pulses. *Probab. Theory Relat. Fields*, **124**, pp. 409–430, 2002.
- [34] J. Barral et B. Mandelbrot. Fractional multiplicative processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B)*, 2009. à paraître.
- [35] J. Barral et S. Seuret. Function series with multifractal variations. *Mathematische Nachrichten*, **274-275**, 1, pp. 3–18, 2004.
- [36] A. Benassi, S. Jaffard, et D. Roux. Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators. *Revista Mathematica Iberoamericana*, **13**, 1, pp. 19–89, 1997.
- [37] D. A. Benson. *The Fractional Advection–Dispersion Equation : Development and Application*. Thèse de doctorat, University of Nevada, 1998.
- [38] R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergassola, et A. Vulpiani. A random process for the construction of multiaffine fields. *Physica D*, **65**, pp. 352–358, 1993.
- [39] R. Benzi, L. Biferale, et F. Toschi. Multiscale velocity correlations in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 15, pp. 3244–3247, 1998.
- [40] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicione, C. Baudet, et F. Massaioli. Extended self similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, **48**, pp. R29–R32, 1993.
- [41] D. Berghmans, F. Clette, et D. Moses. Quiet Sun EUV transient brightenings and turbulence. A panoramic view by EIT on board SOHO. *Astronomy and Astrophysics*, **336**, pp. 1039–1055, août 1998.
- [42] H. Biermé. *Champs aléatoires : autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle*. Thèse de doctorat, Univ. Orléans, 2005.
- [43] H. Biermé. *Champs aléatoires : autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle*. Thèse de doctorat, Orléans University, 2005.
- [44] H. Biermé et C. Lacaux. Hölder regularity for operator scaling stable random fields. *Stochastic Processes and their Applications*, 2009. à paraître.
- [45] H. Biermé, M. M. Meerschaert, et H. P. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stochastic Processes and their Applications*, **117**, 3, pp. 312–332, 2007.
- [46] P. Borgnat. *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, nov. 2002.
- [47] B. Castaing. Conséquences d'un principe d'extrémum en turbulence. *Journal de Physique France*, **50**, pp. 147–156, 1989.
- [48] B. Castaing. The temperature of turbulent flows. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 105–114, 1996.

- [49] B. Castaing. Turbulence : statistical approach. Dans B. Dubrulle, F. Graner, et D. Sornette, rédacteurs, *Scale invariance and beyond*, pp. 225–234. Centre de Physique Les Houches, EDP Sciences - Springer, Cambridge, MA, USA, 1997.
- [50] B. Castaing et B. Dubrulle. Fully developed turbulence : a unifying point of view. *J. Phys. II France*, **5**, pp. 895–899, 1995.
- [51] B. Castaing et Y. Gagne. *Turbulence in spatially extended systems*, chapitre On the inertial range in developed turbulence. Les Houches, 1993.
- [52] B. Castaing, Y. Gagne, et E. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D*, **46**, pp. 177–200, 1990.
- [53] B. Castaing, Y. Gagne, et M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows ? *Physica D*, **68**, pp. 387, 1993.
- [54] P. Chainais. *Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence*. Thèse de doctorat, E.N.S. Lyon, 2001.
- [55] P. Chainais. Multi-dimensional infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. Dans *Proceedings of IEEE-ICIP 2005, Genova*, 2005.
- [56] P. Chainais. Multidimensional infinitely divisible cascades. Application to the modelling of intermittency in turbulence. *Eur. J. Phys. B*, **51**, pp. 229–243, 2006. DOI : 10.1140/epjb/e2006-00213-y.
- [57] P. Chainais. Infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. *IEEE Trans. on Patt. and Mach. Intell.*, 2007. DOI 10.1109/TPAMI.2007.1113 (ISSN : 0162-8828).
- [58] P. Chainais, V. Delouille, et J.-F. Hochedez. Modeling images of the Quiet Sun in the extreme ultraviolet. Dans *Proceedings of SPIE Wavelet XII*. San Diego, 2007.
- [59] P. Chainais, E. Lévêque, P. Abry, et C. Baudet. Remarkable features of multiplier distributions in turbulence. Dans *Advances in Turbulence VIII*. ETC8, Kluwer, Barcelone, 2000.
- [60] P. Chainais et J.-J. Li. Synthèse de champs scalaires multifractals : application à la synthèse de texture. Dans *Proceedings of the 20th Colloquium GRETSI, Paris*, 2005.
- [61] P. Chainais et M. Pachebat. Simulation de champs de pression en paroi par des processus aléatoires. Dans *Proceedings of the 22nd Colloquium GRETSI, Dijon*, 2009.
- [62] P. Chainais, R. Riedi, et P. Abry. Non scale invariant infinitely divisible cascades. Dans *Proceedings of the 19th Colloquium GRETSI, Paris*, 2003.
- [63] P. Chainais, R. Riedi, et P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. Dans *Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France*, January 2003.
- [64] P. Chainais, R. Riedi, et P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 3, pp. 1063–1083, 2005.

- [65] P. Chainais, R. Riedi, et P. Abry. Warped infinitely divisible cascades : beyond scale invariance. *Traitement du Signal*, **22**, 1, 2005.
- [66] A. B. Chhabra et K. R. Sreenivasan. Scale-invariant multiplier distributions in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 18, pp. 2762–2765, 1992.
- [67] Z. Chi. *Probability models for complex systems*. Thèse de doctorat, Brown University, 1998. Ch. 7.
- [68] M. Clausel et B. Vedel. Explicit constructions of operator scaling stable random gaussian fields. *Adv. Appl. Prob.*, 2009. Submitted.
- [69] J.-F. Coeurjolly. *Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires*. Thèse de doctorat, Univ. Grenoble I, 2000.
- [70] J.-F. Coeurjolly. Estimating the Parameters of a Fractional Brownian Motion by Discrete Variations of its Sample Paths. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **4**, 2, pp. 199–227, May 2001.
- [71] P. Collet et F. Koukiou. Large deviations for multiplicative chaos. *Comm. in Math. Phys.*, **147**, pp. 329–342, 1992.
- [72] F. Comets et V. Vargas. Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media. *Alea*, **2**, pp. 267–277, 2006.
- [73] M. Crouse, R. Nowak, et R. Baraniuk. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, **46**, 4, pp. 886–902, Apr 1998.
- [74] S. Debert. *Développement de méthodes de séparation des nombres d'ondes acoustiques et convectifs en écoulements turbulents pariétaux*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2008.
- [75] S. Deguy et A. Benassi. A flexible noise model for designing maps. Dans *Vision, Modelling and Visualization (VMV01)*. Stuttgart, Germany, November 2001.
- [76] V. Delouille, P. Chainais, et J.-F. J.-F. Hochedez. Quantifying and containing the curse of high resolution coronal imaging. *Annales Geophysicae*, **26**, 10, pp. 3169–3184, 2008.
- [77] V. Delouille, J. Patoul, J. F. Hochedez, L. Jacques, et J. P. Antoine. Wavelet Spectrum Analysis Of Eit/Soho Images. *Solar Physics*, **228**, pp. 301–321, mai 2005.
- [78] J. Delour. *Processus aléatoires auto-similaires : applications en turbulence et en finance*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2001.
- [79] A. Dieker et M. Mandjes. On spectral simulation of fractional Brownian motion. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **17**, 03, pp. 417–434, 2003.
- [80] S. Douady et Y. Couder. Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process Part I : The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations. *Journal of Theoretical Biology*, **178**, 3, pp. 255–273, February 1996.
- [81] S. Douady et Y. Couder. Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process Part II : The Spontaneous Formation of a Periodicity and the Coexistence of Spiral and Whorled Patterns. *Journal of Theoretical Biology*, **178**, 3, pp. 275–294, February 1996.

- [82] S. Douady et Y. Couder. Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process Part III : The Simulation of the Transient Regimes of Ontogeny. *Journal of Theoretical Biology*, **178**, 3, pp. 295–312, February 1996.
- [83] B. Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence : log-Poisson statistics and scale invariance. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, pp. 969, 1994.
- [84] B. Dubrulle et F. Graner. Possible statistics of scale invariant systems. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 797–816, 1996.
- [85] B. Dubrulle et F. Graner. Scale invariance and scaling exponents in fully developed turbulence. *J. Phys. II France*, **6**, pp. 817–824, 1996.
- [86] P. Embrechts et M. Maejima. *Selfsimilar Processes*. Academic Press, 2002.
- [87] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, tome 2. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.
- [88] D. Field. What is the goal of sensory coding? *Neural Computation*, **6**, pp. 559–561, 1994.
- [89] P. Flandrin. On the spectrum of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, **35**, pp. 197–199, 1989.
- [90] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, **38**, pp. 910–917, 1992.
- [91] D. Fraser. Interpolation by the FFT revisited-an experimental investigation. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, **37**, 5, pp. 665–675, May 1989.
- [92] U. Frisch. *Turbulence. The legacy of A. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [93] U. Frisch et G. Parisi. Fully developed turbulence and intermittency. Dans M. Ghil, R. Benzi, et G. Parisi, rédacteurs, *Proc. of Int. School on Turbulence and predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, p. 84. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [94] C. Gallagher et A. Kokaram. Non parametric wavelet based texture synthesis. Dans *Proceedings of IEEE-ICIP 2005, Genova*, 2005.
- [95] J. M. Geusebroek. A Scale-space Analysis of Multiplicative Texture Processes. Dans M. Chantler, rédacteur, *Proc. 3rd Int. Workshop on Texture Anal. and Synthesis (Texture 2003)*, pp. 37–40. Heriot-Watt University, 2003.
- [96] J. M. Geusebroek. The Stochastic Structure of Images. Dans R. Kimmel, N. Sochen, et J. Weickert, rédacteurs, *Proc. 5th Int. Conf. Scale Space and PDE Methods in Comput. Vision (Scale Space 2005)*, pp. 327–338. Springer Verlag (LNCS), 2005.
- [97] S. Gissot et J.-F. Hochedez. Multiscale optical flow probing of dynamics in solar EUV images. Algorithm, calibration and first results. *Astronomy & Astrophysics*, **464**, 3, pp. 1107–1118, 2007. Doi : 10.1051/0004-6361 :20065553.
- [98] P. Gonçalves, R. R., et B. R. A simple statistical analysis of wavelet-based multifractal spectrum estimation. Dans *Proc. of the 32nd Conf. on Signals, Systems and Computers, Asilomar, USA*, 1998.

- [99] Y. Gousseau et F. Roueff. Modeling occlusion and scaling in natural images. *SIAM Journal of Multiscale Modeling and Simulation*, **6**, 1, pp. 105–134, 2007.
- [100] W. Graham. A comparison of models for the wavenumber-frequency spectrum of turbulent boundary layer pressures. *Journal of Sound and Vibration*, **206**, 4, pp. 541–565, 1997.
- [101] U. Grenander et A. Srivastava. Probability models for clutter in natural images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **23**, 4, pp. 424–429, 2001.
- [102] V. Grulier, S. Debert, J. Mars, et M. Pachebat. Acoustic and turbulent wavenumbers separation in wall pressure array signals using EMD in spatial domain. Dans *Proceedings of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing.*, pp. 333–336, 31 2008-April 4 2008.
- [103] V. Gupta et E. Waymire. A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *Journal of Applied Meteorology*, **32**, 2, pp. 251–267, Feb. 1993.
- [104] Z. Hamou Mamar. *Analyse temps-échelle et reconnaissance des formes pour le diagnostic du système de guidage d'un tramway sur pneumatiques*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, 2008.
- [105] Z. Hamou Mamar, P. Chainais, et A. Aussem. Probabilistic classifiers and time-scale representations : application to the monitoring of a tramway guiding system. Dans *Proceedings of European Symposium on Artificial Neural Networks*, 2006.
- [106] Z. Hamou Mamar, P. Chainais, et A. Aussem. Combining learning methods and time-scale analysis for defect diagnosis of a tramway guiding system. Dans *IEEE Proceedings of MED'08*. Ajaccio, 2008.
- [107] J. van Hateren et A. van der Schaaf. Independent component filters of natural images compared with simple cells in primary visual cortex. *Proc.R.Soc.Lond. B*, **265**, pp. 359–366, 1998. [Http ://hlab.phys.rug.nl/archive.html](http://hlab.phys.rug.nl/archive.html).
- [108] D. Heeger et J. Bergen. Pyramid Based Texture Analysis/Synthesis. Dans *Computer Graphics Proceedings*, pp. 229–238, 1995.
- [109] J. Istas. Spherical and Hyperbolic Fractional Brownian Motion. *Electronic Communications in Probability*, **10**, pp. 254–262, 2005.
- [110] J. Istas et G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local Holder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Proba. Stat.)*, **33**, 4, pp. 407–436, 1997.
- [111] L. Jacques. *Ondelettes, repères et couronne solaire*. Thèse de doctorat, Univ. Catholique de Louvain, 2004.
- [112] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions, Part 1 & 2. *SIAM J. of Math. Anal.*, **28**, 4, pp. 944–998, 1997.
- [113] S. Jaffard. *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, tome 1, chapitre Ondelettes pour l'analyse multifractale de fonctions. Hermès, 2002.
- [114] S. Jaffard, B. Lashermes, et P. Abry. *Wavelet Analysis and Applications*, chapitre Wavelet leaders in multifractal analysis, pp. 219–264. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2006.

- [115] J.-P. Kahane. Positives Martingales and Random Measures. *Chinese Ann. Math.*, **8B**, pp. 1–12, 1987.
- [116] J.-P. Kahane et J. Peyrière. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. in Math.*, **22**, pp. 131–145, 1976.
- [117] P. Kestener et A. Arneodo. Three-Dimensional Wavelet-Based Multifractal Method : The Need for Revisiting the Multifractal Description of Turbulence Dissipation Data. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 19, pp. 194501, Nov 2003.
- [118] P. Kestener et A. Arneodo. Generalizing the Wavelet-Based Multifractal Formalism to Random Vector Fields : Application to Three-Dimensional Turbulence Velocity and Vorticity Data. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 4, pp. 044501, Jul 2004.
- [119] S. Kida. Log-stable distribution in turbulence. *Fluid Dynamics Research*, **8**, 1-4, pp. 135–138, 1991.
- [120] E. Koenig et P. Chainais. Multifractal analysis on the sphere. Dans *Proc. of Int. Conf. on Im. Sig. Proc.*. Springer Verlag, Caen, France, 2008.
- [121] E. Koenig et P. Chainais. Virtual resolution enhancement of scale invariant textured images using stochastic processes. Dans *Proceedings of IEEE-ICIP 2009, Cairo*, 2009.
- [122] E. Koenig, P. Chainais, V. Delouille, et J.-F. Hochedez. Amélioration virtuelle de la résolution d’images du Soleil par augmentation d’information invariante d’échelle. Dans *Proceedings of the 22nd Colloquium GRETSI, Dijon*, 2009.
- [123] A. N. Kolmogorov. a) Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. b) The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. c) On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. Dans S. Friedlander et L. Topper, rédacteurs, *Turbulence, Classic papers on statistical theory*, pp. 151–161. Interscience publishers, 1941.
- [124] A. N. Kolmogorov. A refinement hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mech.*, **13**, pp. 82–85, 1962.
- [125] R. G. Laha et V. K. Rohatgi. Operator self similar stochastic processes in. *Stochastic Processes and their Applications*, **12**, 1, pp. 73 – 84, 1981.
- [126] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **104**, pp. 62–78, 1962.
- [127] B. Lashermes. *Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini.*. Thèse de doctorat, E.N.S. Lyon, 2005.
- [128] B. Lashermes, P. Abry, et P. Chainais. New Insights into the Estimation of Scaling Exponents. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, **2**, 4, pp. 497–523, 2004.
- [129] B. Lashermes, P. Abry, et P. Chainais. Scaling exponents estimation for multiscaling processes. Dans *Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, 2004.
- [130] B. Lashermes, C. Baudet, P. Abry, et P. Chainais. Limitation of scaling exponent estimation in turbulence. Dans H. Andersson et P.-A. Krogstad, rédacteurs, *Proc. of ETC10, Advances in Turbulence X*, numéro 801. CIMNE, Barcelona, 2004.

- [131] B. Lashermes, S. Jaffard, et P. Abry. Wavelet Leaders Based Multifractal Analysis. Dans *Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*. Philadelphia, USA, 2005.
- [132] A. B. Lee, D. Mumford, et J. Huang. Occlusion Models for Natural Images : A Statistical Study of a Scale-Invariant Dead Leaves Model. *Int. J. Comput. Vision*, **41**, 1-2, pp. 35–59, 2001.
- [133] W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger, et D. Wilson. On the self-similar nature of Ethernet Traffic (extended version). *IEEE/ACM Trans. Networking*, pp. 1–15, 1994.
- [134] R. Livi et A. Vulpiani. *L'héritage de Kolmogorov en physique*. Belin, 2003.
- [135] C. Ludeña. L^p -variations for multifractal fractional random walks. *The Annals of Applied Probability*, **18**, 3, pp. 1138–1163, 2008.
- [136] M. Maejima et J. Mason. Operator self-similar stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **54**, 1, pp. 139–163, 1994.
- [137] Y. Malécot. *Intermittence en turbulence 3D : statistiques de la vitesse et de la vorticit  *. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, oct 1998.
- [138] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [139] B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mech.*, **62**, pp. 331–358, 1974.
- [140] B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance*. Springer, New-York, 1997.
- [141] B. Mandelbrot. A multifractal walk down Wall Street. *Scientific American*, **280**, pp. 70–73, 1999.
- [142] B. B. Mandelbrot. Negative fractal dimensions and multifractals. *Physica A*, **163**, pp. 306–315, 1990.
- [143] D. Marsan, D. Schertzer, et S. Lovejoy. Causal space-time multifractal processes : Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geoph. Res.*, **101**, D21, 1996.
- [144] G. Matheron. *Modèle s  quentiel de partition aléatoire*. Rapport technique, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau., 1968.
- [145] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [146] Y. Meyer, F. Sellan, et M. S. Taqqu. Wavelets, generalized white noise and fractional integration : the synthesis of fractional Brownian motion. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **5**, 5, pp. 465–494, 1999.
- [147] G. Molchan. Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades. *Comm. in Math. Phys.*, **179**, 3, pp. 681–702, 1996.
- [148] G. Molchan. Turbulent cascades : limitations and a statistical test of the lognormal hypothesis. *Phys. Fluids*, **9**, 8, pp. 2387–2396, 1997.
- [149] D. Mumford et B. Gidas. Stochastic models for generic images. *Quarterly of applied mathematics*, **LIV**, 1, pp. 85–111, 2001.
- [150] J. Muzy et E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, **66**, 056121, 2002.

- [151] J.-F. Muzy, E. Bacry, R. Baile, et P. Poggi. Uncovering latent singularities from multifractal scaling laws in mixed asymptotic regime. Application to turbulence. *Europhys. Lett.*, **82**, 6, 2008.
- [152] A. Naert, R. Friedrich, et J. Peinke. A Fokker-Planck Equation for the Energy Cascade in Turbulence. *Phys. Rev. E*, **56**, pp. 6719, 1997.
- [153] L. Nottale. Scale relativity. Dans B. Dubrulle, F. Graner, et D. Sornette, rédacteurs, *Scale invariance and beyond*. Centre de Physique Les Houches, EDP Sciences - Springer, Cambridge, MA, USA, 1997.
- [154] E. A. Novikov. Intermittency and scale-similarity in the structure of a turbulent flow. *P.M.M. Appl. Math. Mech.*, **35**, pp. 231–241, 1971. [voir aussi Prikl. Mat. Mekh. **35** 266-277 (1971)].
- [155] E. A. Novikov. The effects of intermittency on statistical characteristics of turbulence and scale similarity of breakdown coefficients. *Phys. Fluids*, **2**, 5, pp. 814–820, 1990.
- [156] E. A. Novikov. Infinitely divisible distributions in turbulence. *Phys. Rev. E*, **50**, 5, pp. R3303–R3305, 1994.
- [157] E. A. Novikov et R. W. Stewart. The intermittency of turbulence and the spectrum of energy dissipation fluctuations. *Izv. Geophys. Ser.*, **3**, pp. 408–413, 1964. Translated by C.M. Wade.
- [158] M. Ossiander et E. Waymire. Statistical estimation for multiplicative cascades. *Ann. Statistics*, **28**, 6, pp. 1533–1560, 2000.
- [159] M. Ossiander et E. Waymire. On estimation theory for multiplicative cascades. *The Indian Journal of Statistics*, **64A**, pp. 323–343, 2002.
- [160] A. Pauluhn, S. K. Solanki, I. Rüedi, E. Landi, et U. Schühle. Statistics of quiet Sun extreme ultraviolet intensities. *Astronomy and Astrophysics*, **362**, pp. 737–745, octobre 2000.
- [161] S. Pecknold, S. Lovejoy, D. Schertzer, C. Hooge, et J. F. Malouin. The simulation of universal multifractals. Dans *Cellular Automata*, pp. 228–267, 1993.
- [162] G. Pedrizzetti, E. A. Novikov, et A. A. Praskovsky. Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency. *Physical Review E*, **53**, 1, pp. 475–484, jan 1996.
- [163] V. Pipiras et M. S. Taqqu. Fractional calculus and its connections to fractional Brownian motion. Dans P. Doukhan, G. Oppenheim, et M. S. Taqqu, rédacteurs, *Long-Range Dependence : Theory and Applications*, pp. 165–201. Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- [164] B. Pochart et J.-P. Bouchaud. The skewed multifractal random walk with applications to option smiles. *Quantitative Finance*, **2**, 4, pp. 303–314, 2002.
- [165] B. Rajput et J. Rosinski. Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probability Theory and Related Fields*, **82**, pp. 451–487, 1989.
- [166] S. Resnick, G. Samorodnitsky, A. Gilbert, et W. Willinger. Wavelet analysis of conservative cascades. *Bernoulli*, **9**, 1, pp. 97–135, 2003.

- [167] R. Rhodes et V. Vargas. Multi-dimensional Multifractal Random Measures. *preprint*, 2009.
- [168] L. Richardson. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- [169] R. Riedi. *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, tome 2, chapitre Lois d'échelles multifractales : fondements et approche par ondelettes. Hermès, 2002.
- [170] R. H. Riedi. *Theory and applications of long range dependence*, chapitre Multifractal processes, pp. 625–716. Birkhauser, 2003. Eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu.
- [171] R. Robert et V. Vargas. Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields. *Communications in Mathematical Physics*, **284**, 3, 2008.
- [172] S. Roth et M. J. Black. Fields of experts. *Int. J. Comput. Vision*, **82**, 2, pp. 205–229, 2009.
- [173] D. Ruderman. The statistics of natural images. *Network : computation in neural systems*, **5**, pp. 517–548, 1994.
- [174] D. Ruderman. Origins of scaling in natural images. *Vision Res.*, **37**, 23, pp. 3385–3398, 1997.
- [175] D. Ruderman et W. Bialek. Statistics of natural images : scaling in the woods. *Physical Review Letters*, **73**, 3, pp. 814–817, 1994.
- [176] A. Saichev et D. Sornette. Generic multifractality in exponentials of long memory processes. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, **74**, 1, pp. 011111, 2006.
- [177] Y. Saito. Log-Gamma distribution model of intermittency in turbulence. *J. of the Phys. Soc. of Japan*, **61**, 2, pp. 403–406, 1992.
- [178] G. Samorodnitsky. Long memory and self-similar processes. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **15**, 1, pp. 107–123, 2006.
- [179] G. Samorodnitsky et M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes, stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New-York, London, 1994.
- [180] D. Schertzer et S. Lovejoy. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. Dans B. Launder, rédacteur, *Selected papers from the 4th Int. Symp. on Turbulent Shear Flows*, pp. 7–33. Springer, Karlsruhe, Sept. 1985.
- [181] D. Schertzer et S. Lovejoy. Generalised scale invariance and anisotropic intermittent fractals. Dans T. Pietronero, rédacteur, *Fractals in Physics*, pp. 457–461. North-Holland, 1986.
- [182] D. Schertzer et S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, **92**, pp. 9693, 1987.
- [183] D. Schertzer et S. Lovejoy. Hard and soft multifractal processes. *Physica A*, **185**, 1-4, pp. 187–194, 1992.
- [184] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chiguirinskaya, et D. Marsan. Log-Gamma distribution model of intermittency in turbulence. *Fractals*, **5**, 3, pp. 427–471, 1997.

- [185] J. Schmiegel, O. Barndorff-Nielsen, et H. Eggers. A Class of Spatio-Temporal and Causal Stochastic Processes, with Application to Multiscaling and Multifractality. *South African J. Sci.*, **101**, pp. 513, 2005.
- [186] J. Schmiegel, J. Cleve, H. Eggers, B. Pearson, et M. Greiner. Stochastic energy-cascade model for (1+1)-dimensional fully developed turbulence. *Phys. Lett. A*, **320**, pp. 247–253, 2004.
- [187] F. Schmitt. Intermittence et turbulences : analyse de données, validation de modèles et applications. Habilitation à diriger des recherches, 2001.
- [188] F. Schmitt. A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. *Eur. Phys. J. B*, **34**, pp. 85–98, 2003.
- [189] F. Schmitt et P. Chainais. On causal stochastic equations for log-stable multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, **58**, pp. 149–158, 2007.
- [190] F. Schmitt et D. Marsan. Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, **20**, pp. 3–6, 2001.
- [191] F. Schmitt, D. Schertzer, S. Lovejoy, et Y. Brunet. Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **1**, pp. 95–104, 1994.
- [192] C. Schrijver et et al. A new view of the solar outer atmosphere by the Transition Region and Coronal Explorer. *Solar Physics*, **187**, pp. 261–302, 1999.
- [193] P. Schröder et W. Sweldens. Spherical wavelets : Efficiently representing functions on a sphere. Dans *Computer Graphics Proceedings SIGGRAPH'95*, tome 29, pp. 161–172, 1995.
- [194] Z. S. She et E. C. Waymire. Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, **74**, 2, pp. 262–265, 1995.
- [195] E. Simoncelli. *Handbook of video and image processing*, chapitre Statistical modeling of photographic images. Academic Press, 2005. Alan Bovik.
- [196] D. Sornette. Discrete scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, **297**, pp. 239–270, 1998.
- [197] A. Srivastava, A. Lee, E. Simoncelli, et S.-C. Zhu. On advances in statistical modeling of natural images. *Journal of mathematical imaging and vision*, **18**, pp. 17–33, 2003.
- [198] A. Srivastava, X. Liu, et U. Grenander. Universal Analytical Forms for Modeling Image Probabilities. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, **24**, 9, pp. 1200–1214, 2002.
- [199] J.-L. Starck, Y. Moudden, P. Abrial, et M. Nguyen. Wavelets, ridgelets and curvelets on the sphere. *Astron. astrophys.*, **446**, pp. 1191–1204, 2006.
- [200] P. Tafti, D. Van De Ville, et M. Unser. Invariances, Laplacian-like wavelet bases and the whitening of fractal processes. *IEEE Transactions on Image Processing*, **18**, 4, pp. 689–702, 2009.
- [201] A. Turiel, G. Mato, et N. Parga. Self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows. *Physical Review Letters*, **80**, 5, pp. 1098–1101, 1998.

- [202] A. Turiel et N. Parga. The multifractal structure of contrast changes in natural images : from sharp edges to textures. *Neural Computation*, **12**, pp. 763–793, 2000.
- [203] M. Unser. Splines : a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 22–38, November 1999.
- [204] M. Unser, A. Aldroubi, et M. Eden. B-Spline signal processing : Part I - Theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, 2, pp. 821–833, February 1993.
- [205] M. Unser, A. Aldroubi, et M. Eden. B-Spline signal processing : Part II - Efficient design and applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, 2, pp. 834–848, February 1993.
- [206] C. W. Van Atta et T. T. Yeh. Structure functions of turbulence in the boundary layer over the ocean. *J. Fluid Mech.*, **71**, pp. 417, 1975.
- [207] A. Vincent et M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, pp. 1–20, 1991.
- [208] M. Wainwright et E. Simoncelli. Scale mixtures of Gaussians and the statistics of natural images. *Adv. Neural Information Processing Systems*, **12**, pp. 855–861, 2000. NIPS'99.
- [209] M. Wainwright, E. Simoncelli, et A. Willsky. Random cascades on wavelet trees and their use in analyzing and modeling natural images. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **11**, pp. 89–123, 2001.
- [210] L.-Y. Wei et M. Levoy. Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization. Dans *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 479–488. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.
- [211] H. Wendt. *Contributions of Wavelet Leaders and Bootstrap to Multifractal Analysis : Images, Estimation Performance, Dependence Structure and Vanishing Moments. Confidence Intervals and Hypothesis Tests.*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2008.
- [212] H. Wendt, P. Abry, et S. Jaffard. Bootstrap for Empirical Multifractal Analysis. *Signal Processing Magazine, IEEE*, **24**, 4, pp. 38–48, July 2007.
- [213] H. Wendt, S. G. Roux, P. Abry, et S. Jaffard. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images. *Signal Proces.*, **89**, pp. 1100–1114, 2009.
- [214] Y. Wiaux, J. McEwen, P. Vandergheynst, et O. Blanc. Exact reconstruction with directional wavelets on the sphere. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **388**, pp. 770, 2008.
- [215] A. Wood et G. Chan. Simulation of stationary Gaussian processes in $[0,1]^d$. *J. Comput. Graph. Stat.*, **3**, 4, pp. 409–432, 1994.
- [216] A. M. Yaglom. Effect of fluctuations in energy dissipation rate on the form of turbulent characteristics in the inertial subrange. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **166**, pp. 49–52, 1966.